

(解析数论研究专著)

Barban-Davenport-Halberstam 均值和

刘弘泉 著

哈爾濱工業大學出版社

责任编辑 翟新烨
封面设计 张孝东

ISBN 978-7-5603-2784-6



9 787560 327846 >

定价 40.00元

解析数论研究专著

Barban-Davenport-Halberstam 均值和

刘弘泉 著

图书在版编目(CIP)数据

Barban-Davenport-Halberstam 均值和/刘弘泉著.
—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2008.10
ISBN 978-7-5603-2784-6

I. B… II. 刘… III. 数论-研究 IV. 0156

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 157443 号

责任编辑 翟新烨
封面设计 张孝东
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开 本 787mm×960mm 1/16 印张 19.5 字数 227 千字
版 次 2008 年 11 月第 1 版 2008 年 11 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-2784-6
印 数 1~1 000 册
定 价 40.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

前 言

Barban-Davenport-Halberstam 均值和 (以下简称“BDH 均值和”)是涉及大筛法应用和算术级数中素数分布的一个重要均值和,最初是由前苏联数论学家 M. B. Barban、英国数论学家 H. Davenport 及 H. Halberstam 独立地在 20 世纪 60 年代加入研究的,Davenport 在其名著《Multiplicative Number Theory》(见[D])的 § 29 中专论此和,而英国数论学家 C. Hooley 则从 1975 年至今已在“On the Barban-Davenport-Halberstam theorem”的大标题下共发表了 17 篇论文。应用大筛法和 Siegel 定理,Barban、Davenport、Halberstam 及 Gallagher 已获得了 BDH 均值和适当的上界估计, Montgomery 与 Hooley 则分别在 1970 年和 1975 年用不同的方法得到了 BDH 均值和 $S(Q, x)$ 适当的渐近公式(此处“适当的”一词意指 Q 与 x 满足一由 Siegel 定理所界定的不等式)。

我在 1993 年发表了一篇关于如何获求某些“BDH 型均值和”适当下界估计的论文(见[L2]),特别地由该文结果可导出 BDH 均值和已知的适当下界估计。该文的方法是全新的,因为我没有像通常那样将 BDH 均值和加以平方展开,而是发现了 BDH 均值和同圆法(“圆法”通常用来研究加法数论的问题!)中间内在而微妙的联系,由此只需将一个显然的恒等式中的积分按圆法中的“优弧”和“劣弧”加以分部处理,再经过一些求和与积分的变化,即会使问题中的“BDH 型均值和”显现出来,从而获得一个适当的下界估计。受到陈景润和潘承洞在关于 Goldbach 数例外集工作中一引进处理方法的启发,在文[L2]中新方法的基础上,我又

在 1995 年发表了一篇关于 BDH 均值和下界估计的论文(见文 [L3]),在其中我突破了由使用 Siegel 定理所带来的传统限制条件,该文的结果立即得到了国外同行高度评价(J. B. Friedlander 的评价可见《Mathematical Review》, 1996(f), 11125)。将圆法的思想同大筛法乃至 L -函数零点密度估计方法相结合后产生的威力,已在 [L3]的工作中得到体现。值得指出的是,虽然后来 Hooley 采用其他方法也成功地突破了由使用 Siegel 定理所带来的传统限制条件,且能改进我所获得的下界估计的系数,但他却无法突破我在 [L3]中获得的一个优于素数定理余项形式的结果(较为宽泛的 Q 与 x 的限制条件(见本书附录三))。最近,在一篇即将发表的论文中(见 [L6]),我在将 BDH 均值和平方展开的基础上(这又回到了 Montgomery 方法和 Hooley 方法的出发点),综合运用圆法与 L -函数零点密度估计方法,在突破了由使用 Siegel 定理所带来的传统限制条件的情况下,经过很复杂的求和与积分的变幻,获得了 BDH 均值和的一个显含 L -函数例外零点的“拟渐近公式”,由此立即可得两个重要推论:(i)欲获得 BDH 均值和在突破了由使用 Siegel 定理所带来的传统限制条件的情况下的标准形式的上界估计,就必须对 L -函数可能出现的例外实零点的上界做适当假设(这实际已解决了自 Gallagher 1967 年的工作以来关于 BDH 均值和上界估计的一个长期悬而未决的问题;这是迄今为止 Hooley 等人的方法无论如何所达不到的);(ii)在关于 Q 与 x 的同类限制条件下,改进了 Hooley 在其 2000 年的文章 [H7]中所获得的关于 BDH 均值和的下界估计(见附录三)。文 [L6]中的结果亦是可以不依赖于 Siegel 定理的。

出版本书的目的便是向国内外数学界介绍我在文 [L3]和文 [L6]中所获得的处于世界前沿水平的研究成果,并在此同时向广大数论爱好者展示解析数论中一些常用的技巧和方法。第一章

和第二章是本书的基础,其中分别用细腻的笔法讲解了 L -函数(包括 zeta 函数)的基础理论、大筛法的基本理论及其如何用于 L -函数零点密度估计的推导。本书的特点之一是弃用了“Siegel 定理”这个不实效的结果,因为我已发现在推导该定理时存在严重逻辑错误。由著名数学家潘承洞和潘承彪所著的《解析数论基础》一书([PP]),无论从深度和广度上都已超过了 Davenport 的书,近 20 年来的确使国内大量年轻学者受益匪浅,但其中也有的处理含糊不清,为此我在处理相关内容时进行了若干更正。其一,涉及 L -函数的估阶,我在定理 1.3.6(i)的(b)步骤中所构造的那个函数 $f(s)$ 确为解析函数(这是应用最大模原理所必需的),而且我在那里接下去所做的技术讨论也是[PP]中所没有的。其二,涉及 L -函数在“ $\sigma=1$ ”附近的“无对数因子型”零点密度估计,我在定理 2.5.1 中只能获得带有“loglog”型因子的零点密度估计,这还是将[PP]中相关错误的处理加以更正并加细讨论后才得到的,因为我发现在 Jutila 于 1977 年发表的那篇论文中,它仅仅是认为用其方法可获得“无对数因子型”零点密度估计而并未详细写出([PP]中正是用了 Jutila 所建议的方法)。是不是其他获得 L -函数“无对数因子型”零点密度估计的方法也经不起推敲?我经研究发现果真如此,于是 Montgomery 和 Vaughan(还有潘承洞、陈景润、刘健民、李红泽)等人关于 Goldbach 例外集的重要工作就都达不到了。值得指出的是,涉及第三章中的结果,实际上只需要 L -函数的带有“log”较小幂次型因子的零点密度估计就足够了。本书第三章则系统地阐述了我关于 BDH 均值和的两项成果,其中的论证在本书范围内是“自给自足”的,追求新颖性(例如,我在 § 3.2 中设计了一种初等的处理方法,以此避免使用要用实分析 L^2 -理论中的 Plancherel 定理才能证明的“Gallagher 引理”),且对论文中的结果略有改进(例如,定理 3.2.1 已将文[L3]

中的系数由“ $1/4$ 改进为 $1/2$ ”,而与文[L6]的主要结果相比,在定理 3.3.1 的表述中,则添加了因不使用“Siegel 定理”所产生出来的一个额外非负求和)。本书中没有对任何推广形式的“BDH 型均值和”加以论述,有兴趣的读者可参阅我已发表的二篇论文(见[L2],[L4])。本书 § 3.4 中提到的那个均值和,亦是很值得研究的,对此有兴趣的年轻学者无妨深入地探讨一下。

解析数论在我国是强项,自华罗庚、闵嗣鹤、王元、陈景润、潘承洞等以来已有几代学者在从事相关一些方向的研究,目前可以说是方兴未艾,年轻人才辈出,都活跃在国际研究前沿。因此,我希望本书的出版能对同行学者具有一定的启迪意义。追求数学推理的严密性实在是数学家最重要的素质,这不仅应体现在若干带刺激性的计算或证明中,更应体现在理解一些数学中最基本但却较为乏味的东西上,对此恐怕只有那些仔细品味本书中细致推理的读者才能体会到我的良苦用心。阅读本书读者须具备初等数论、数学分析以及复变函数的大量知识。

哈工大数学系吴从炘、李容录、唐余勇三位教授,以及哈工大出版社黄菊英总编、刘培杰先生,皆对本书的出版给予支持与鼓励,我在此对他们表示衷心的感谢。本书是由哈工大校科研专著出版基金资助出版的。

刘弘泉

2008 年 10 月于哈工大

常用的一些记号

1°. Res 和 $\text{Im}s$ 分别为复数 s 的实部与虚部, 即 $s = \text{Res} + i\text{Im}s$, $i = \sqrt{-1}$, 见 § 1.1。

2°. $\Gamma(s)$ 为 Γ -函数, 当 $\text{Res} > 0$ 时, 它定义为

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt.$$

见 § 1.1。

3°. (n, q) 与 $[n, q]$ 分别表示全不为零的整数 n 与 q 的正的最大公因子与最小公倍数. 当 $n = 0, q \neq 0$ 时, 定义 $(n, q) = |q|$, 其他情形没有定义, 当 $nq \neq 0$ 且 $(n, q) = 1$ 时称 n 与 q 互素. 见 § 1.2。

4°. $a \equiv b \pmod{q}$ 或 $q \mid (a - b)$ 表示 $q \neq 0$ 且 $(a - b)$ 为 q 的整数倍, 见 § 1.2。

5°. p 表示素数, 即仅以 1 和它自身为因子的正整数. 规定 1 不是素数. 见 § 1.2。

6°. $\varphi(q)$ 为 Euler 函数, 即不超过 q 且与 q 互素的正整数个数,

$$\varphi(q) = q \prod_{p \mid q} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

见 § 1.2。

7°. χ 或 $\chi(n)$ 为特征函数, 它是完全积性的周期函数. 设 q 为正整数, 则模 q 的特征 $\chi(n)$ 的周期为 q . 当 $(n, q) > 1$ 时 $\chi(n) = 0$, 当 $(n, q) = 1$ 时, $|\chi(n)| = 1$, 并规定 $\chi(0) = 0$. 见 § 1.2。

8°. $e(\xi) = \exp(2\pi i \xi) = e^{2\pi i \xi} = \cos(2\pi \xi) + i \sin(2\pi \xi)$, π 为圆周率, $i = \sqrt{-1}$ 。见 § 1.2。

9°. $\tau(\chi) = \sum_{1 \leq n \leq q} \chi(n) e(n/q)$ 为 Gauss 和, 其中 χ 为模 q 的特征, 见 § 1.2。

10°. χ_q^0 (或 χ_0 , 若不致引起混淆) 为模 q 的主特征, 即当 $(n, q) = 1$ 且 $n \neq 0$ 时值恒为 1 的特征。见 § 1.2。

11°. $c_q(n) = \tau(\chi_q^0) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq q \\ (n, q) = 1}} e\left(\frac{n}{q}\right)$ 为 Ramanujan 和, 其值为 $\frac{\varphi(q)\mu(q/(n, q))}{\varphi(q/(n, q))}$, 见 § 1.2。

12°. $\sum_{\chi \bmod q}$ 表示求和通过模 q 所有的特征, 见 § 1.2。

13°. $\mu(q)$ 为 Möbius 函数, $\mu(1) = 1$, 当 q 为 r 个不同素数之积时, $\mu(q) = (-1)^r$, 对其他情形 $\mu(q) = 0$ 。见 § 1.2。

14°. $L(s, \chi)$ 为 L -函数, χ 为模 q 的任一特征, s 为复数。当 $\text{Res} > 1$ 时, 它定义为

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

见 § 1.3。

15°. $\xi(s, \chi)$ 为一个整函数, 见 § 1.3。

16°. $\zeta(s)$ 为 ζ -函数, s 为复数。当 $\text{Res} > 1$ 时, 它定义为

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s},$$

见 § 1.3。

17°. $\xi(s)$ 为一个整函数, 见 § 1.3。

18°. $A = O(B)$ 或 $A \ll B$ 表示 $B \geq 0$ 且 $|A| \leq CB$, 其中 C 是一个相对而言可以忽略不计的正常数, 见 § 1.3。

19°. $\tau(n)$ 为除数函数, 即正整数 n 的不同的因子的个数, 见

§ 1.4。

20°. $\Lambda(n)$ 为 von Mangoldt 函数, 当 n 为素数 p 的正整数次幂时, $\Lambda(n) = \log p$, 否则 $\Lambda(n) = 0$ 。见 § 1.4。

21°. $N(T, \chi)$ 表示 $L(s, \chi)$ 的满足条件 $|t| \leq T$ 的非平凡零点 $s = \sigma + it$ 的数目, 其中零点是几阶的就重复计数几次, 见 § 1.5。

22°. $N(T)$ 表示 $\zeta(s)$ 的满足条件 $|t| \leq T$ 的非平凡零点 $s = \sigma + it$ 的数目, 其中零点是几阶的就重复计数几次, 见 § 1.5。

23°. $\pi(x; q, a)$ 表示算术级数 $\{a + nq \mid n = 0, 1, 2, \dots\}$ 中不超过 x 的不同素数的个数, 见 § 1.6。

24°. $\phi(x; q, a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n)$, 见 § 1.6。

25°. $\phi(x, \chi) = \sum_{n \leq x} \chi(n) \Lambda(n)$, 其中 χ 为一特征, 见 § 1.6。

26°. $\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$, 见 § 1.6。

27°. $\pi(x)$ 表示不超过 x 的不同素数的个数, 见 § 1.6。

28°. $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 见 § 1.6。

29°. $\|x\|$, 当 x 为 N 维向量 (x_1, \dots, x_N) 时 (x_1, \dots, x_N 为复数), 表示向量的范数, 即

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + \dots + |x_N|^2},$$

见 § 2.1。

30°. $\|x\|$, 当 x 为实数时, 表示 x 到距之最近的整数之间的距离, 即

$$\|x\| = \min_{n \in Z} |x - n|,$$

其中 Z 表示全体整数的集合, 见 § 2.1。

31°. R^1 表示实直线 $(-\infty, \infty)$, 见 § 2.2。

32°. \hat{f} 为函数 f 的 Fourier 变换。当 f 在 R^1 上绝对可积时,

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e(ux) du.$$

见 § 2.2。

$$33^\circ. \tau_a(r) = \prod_{p|r} (1 - p^a)^{-1}, \text{ 其中 } a = -\frac{1}{3}, \text{ 见 § 2.3.}$$

$$34^\circ. k(n) = n \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right), \text{ 见 § 2.4.}$$

$$35^\circ. \gamma \text{ 为 Euler 常数, } \gamma = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{1 \leq n \leq N} \frac{1}{n} - \log N \right), \text{ 见 § 2.3.}$$

36°. $N(\alpha, T, \chi)$ 表示 $L(s, \chi)$ 的满足 $\rho = \beta + it$, $|t| \leq T$, $\alpha \leq \beta \leq 1$ 的零点 ρ 的个数, 其中一个零点是几阶的就重复计数几次, 见 § 2.4。

$$37^\circ. \sum_{\chi \bmod q}^* \text{ 表示求和通过模 } q \text{ 的所有原特征 } \chi, \text{ 见 § 2.4.}$$

38°. $N(\alpha, T)$ 表示 $\zeta(s)$ 的满足 $\rho = \beta + it$, $|t| \leq T$, $\alpha \leq \beta \leq 1$ 的零点 ρ 的个数, 其中一个零点是几阶的就重复计数几次, 见 § 2.5。

$$39^\circ. S(Q, x) = \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{(a, q) = 1 \\ 1 \leq a \leq q}} \left(\psi(x; q, a) - \frac{1}{\varphi(q)} \psi(x, \chi_q^0) \right)^2 \text{ 为}$$

BDH 均值和, 其中 $x \geq Q \geq 3$, 见 § 3.1。

$$40^\circ. T(Q, x) = \sum_{q \leq Q} \frac{1}{q} \sum_{\substack{(a, q) = 1 \\ 1 \leq a \leq q}} \left| \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) = 1}} \Lambda(n) e\left(\frac{na}{q}\right) - \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) = 1}} \Lambda(n) \right|^2,$$

见 § 3.4。

$$41^\circ. \tau_Q(r) = \sum_{\substack{1 \leq n \leq Q \\ n|r}} 1, \text{ 见 § 3.5.}$$

目 录

第一章 L 函数	1
§ 1.1 Γ 函数	1
§ 1.2 特征与特征和	16
§ 1.3 L 函数的函数方程	29
§ 1.4 整函数 $\xi(s, \chi)$ 的无穷乘积展开	58
§ 1.5 L 函数的零点分布	86
§ 1.6 算术级数中的素数	116
第二章 大筛法与 L 函数的零点密度估计	132
§ 2.1 大筛法	132
§ 2.2 Mellin 变换及其应用	143
§ 2.3 若干数论函数的求和	157
§ 2.4 L 函数的零点密度估计	188
§ 2.5 ζ 函数的零点密度估计	204
第三章 BDH 均值和	210
§ 3.1 引言	210
§ 3.2 BDH 均值和的下界	211
§ 3.3 BDH 均值和的一个显含 L 函数例外零点的 渐近展开式	243

§ 3.4 一个与 BDH 均值和密切相关的均值和	279
附录一 复分析中的若干基本概念与原理	280
附录二 解析数论中的求和与交换求和	287
附录三 对 Hooley 2000 年一文的注记	291
参考文献	293

第一章

L 函数

特征及 L 函数是为了研究算术级数中素数的分布而引入的。

§ 1.1 Γ 函数

我们用 $\operatorname{Re} s$ 代表复数 s 的实部。对任意正实数 t , t^{s-1} 定义为

$$\exp((s-1)\log t),$$

这里 $\log z$ 取对数的主分支, 即可把 z 取值于整个复 z 平面上去掉了原点及负实轴后得到的开连通集 Ω , 且 $\log 1 = 0$ (这时 $\log z$ 为 Ω 上的解析函数)。 $t > 0$, t 固定时, t^{s-1} 则为全 s 平面上处处解析的函数, 即整函数。当 $\operatorname{Re} s > 0$ 时, Γ 函数 $\Gamma(s)$ 定义为

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt,$$

这里积分的收敛应理解为两个极限

$$\int_0^1 e^{-t} t^{s-1} dt = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 e^{-t} t^{s-1} dt \text{ 与 } \int_1^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x e^{-t} t^{s-1} dt$$

同时存在, 而有限区间上复值函数的积分则应定义为先将被积函数的实部与虚部分别积分, 然后将实部积分的值加上虚部积分的值乘 i 。为研究 $\Gamma(s)$ 的性质, 我们需要证明几个引理。

引理 1.1.1 设 s 为一个复变数, $f(t, s)$ 当 $0 < t \leq 1$ 时为关于 s 的在 $\operatorname{Re} s > 0$ 上的解析函数, 当 $1 \leq t < \infty$ 时为关于 s 的整函数。而且, 对于任意给定的正数 δ 及 D , $|s| \leq D$, 设 $f(t, s)$ 关

于 t 在包含于区间 $[\delta, \infty)$ 的任何有限的闭区间上对 s 一致连续。我们有

(i) 若对任取 $d > 0$, 当 $0 < t \leq 1, d \leq \text{Res} \leq 3d$ 时, $f(t, s) = O(G(t))$, 且

$$\int_0^1 G(t) dt = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta}^1 G(t) dt$$

存在, 那么当 $\text{Res} > 0$ 时, 极限

$$F_1(s) = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta}^1 f(t, s) dt = \int_0^1 f(t, s) dt$$

存在, 且表示 $\text{Res} > 0$ 上的解析函数。

(ii) 若设对任取 $d > 0$, 当 $1 \leq t < \infty, -d \leq \text{Res} \leq d$ 时, 就有 $f(t, s) = O(K(t))$, 且

$$\int_1^{\infty} K(t) dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x K(t) dt$$

存在, 那么对任意复数 s , 极限

$$F_2(s) = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x f(t, s) dt = \int_1^{\infty} f(t, s) dt$$

存在, 且代表一个整函数。

因此, 若(i) 与(ii) 中的假设条件都成立, 当 $\text{Res} > 0$ 时定义

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t, s) dt = F_1(s) + F_2(s),$$

则函数 $F(s)$ 为 $\text{Res} > 0$ 上的解析函数。

证明: (i) 设 s_0 为任一个满足 $\text{Res}_0 > 0$ 的复数。令 $d = \frac{1}{2}\text{Res}_0$ 。用 C 代表圆周 $\{z \mid |z - s_0| = d\}$ 。当 $|s - s_0| \leq d$ 时, 我们有 $d \leq \text{Res} \leq 3d$ 。设 M 为一个充分大的自然数。当 $|s - s_0| < \frac{d}{2}$ 时, 令

$$f_M(t, s) = \sum_{n=0}^M a_n(t, s_0)(s - s_0)^n,$$

$$a_n(t, s_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t, z)}{(z - s_0)^{n+1}} dz.$$

则由假设的条件可得

$$\begin{aligned} f_M(t, s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t, z)}{z - s_0} \left(\sum_{n=0}^M \left(\frac{s - s_0}{z - s_0} \right)^n \right) dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t, z)}{z - s} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(t, z)}{z - s} \left(\frac{s - s_0}{z - s_0} \right)^{M+1} dz \\ &= f(t, s) + O(2^{-M}G(t)). \end{aligned}$$

对任意的 $\delta > 0$, $a_n(t, s_0)$ 为 $[\delta, 1]$ 上的连续函数。所以

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^1 f_M(t, s) dt &= \sum_{n=0}^M (s - s_0)^n \int_{\delta}^1 a_n(t, s_0) dt \\ &= \int_{\delta}^1 f(t, s) dt + O(2^{-M} \int_{\delta}^1 G(t) dt). \end{aligned}$$

令 $M \rightarrow \infty$, 得

$$\sum_{n=0}^{\infty} (s - s_0)^n \int_{\delta}^1 a_n(t, s_0) dt = \int_{\delta}^1 f(t, s) dt. \quad (1)$$

由假设可得估计

$$|a_n(t, s_0)| = O(d^{-n}G(t)), \quad (2)$$

及

$$\int_0^1 G(t) dt = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 G(t) dt < \infty,$$

故可知

$$\int_0^1 a_n(t, s_0) dt = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 a_n(t, s_0) dt$$

存在, 且

$$\int_{\delta}^1 a_n(t, s_0) dt = \int_0^1 a_n(t, s_0) dt + O\left(\int_0^{\delta} d^{-n}G(t) dt\right).$$

所以由(1) 可得

$$\int_{\delta}^1 f(t, s) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (s - s_0)^n \left(\int_0^1 a_n(t, s_0) dt \right) + O\left(\int_0^{\delta} G(t) dt\right).$$

令 $\delta \rightarrow 0$, 可得

$$\int_0^1 f(t, s) dt = \sum_{n=0}^{\infty} (s - s_0)^n \left(\int_0^1 a_n(t, s_0) dt \right).$$

由(2), 这个等式就说明 $\int_0^1 f(t, s) dt$ 是 $|s - s_0| < d$ 上的解析函数。所以

$$F_1(s) = \int_0^1 f(t, s) dt = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta}^1 f(t, s) dt$$

存在且代表 $|s - s_0| < d$ 中的解析函数。由于 s_0 是任意的, $\operatorname{Re} s_0 > 0$, 所以 (i) 成立。类似地可证明 (ii)。证毕。

引理 1.1.2 (i) 当 $0 \leq x < 1$ 时, $\log(1 - x) \leq -x$ 。

(ii) 当 $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ 时, $x + \log(1 - x) + x^2 \geq 0$ 。

证明: (i) 令 $f_1(x) = \log(1 - x) + x$, $0 \leq x \leq x_1 < 1$, 则

$$f_1'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} \leq 0.$$

所以 $f_1(x)$ 为下降函数。由于 $f_1(0) = 0$, 可知对每个 $x \in [0, x_1]$ 成立着 $f_1(x) \leq 0$ 。

(ii) 令 $f_2(x) = x + \log(1 - x) + x^2$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, 则

$$f_2'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} + 2x = x \left(2 - \frac{1}{1-x} \right) \geq 0,$$

所以 $f_2(x)$ 为上升函数。由于 $f_2(0) = 0$, 可知对每个 $x \in [0, \frac{1}{2}]$ 成立有 $f_2(x) \geq 0$ 。证毕。

引理 1.1.3(分部求和) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有连续一阶导函数 $f'(x)$, C_m 为任意复数,

$$C(x) = \sum_{a < m \leq x} C_m, a \leq x \leq b,$$

则

$$\sum_{a < n \leq b} C_n f(n) = - \int_a^b C(x) f'(x) dx + C(b) f(b).$$

证明:我们有

$$\begin{aligned}
 \sum_{a < n \leq b} C_n f(n) &= \sum_{a < n \leq b} (C(n) - C(n-1))f(n) \\
 &= \sum_{a < n \leq b} C(n)f(n) - \sum_{a < n \leq b-1} C(n)f(n+1) \\
 &= C(b)f([b]) + \sum_{a < n \leq b-1} C(n)(f(n) \\
 &\quad - f(n+1)); \tag{3}
 \end{aligned}$$

这里 $[b]$ 为不超过 b 的最大整数。先设 $[b] \geq [a] + 2$ 。对每个整数 $n, n \in [[a+1], [b]-1]$, 将区间 $[n, n+1]$ 任意分成 m 个小段, 即

$$n = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = n+1,$$

并在 $[x_i, x_{i+1}]$ 中任选一点 ξ_i , 作和

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^{m-1} C(\xi_i) f'(\xi_i) \Delta x_i &= C(n) \left(\sum_{i=0}^{m-1} f'(\xi_i) \Delta x_i \right) \\
 &\quad + O(|\tilde{C}(n)| \cdot K \cdot \Delta x_{m-1}), \tag{4}
 \end{aligned}$$

其中 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $|\tilde{C}(n)| = \max(|C(n)|, |C(n+1)|)$, $K = \max_{n \leq x \leq n+1} |f'(x)| < \infty$ 。设当 $m \rightarrow \infty$ 时, $\max_{1 \leq i \leq m-1} \Delta x_i \rightarrow 0$ 。在(3)中令 $m \rightarrow \infty$, 则由定义可得

$$\begin{aligned}
 \int_n^{n+1} C(x) f'(x) dx &= C(n) \left(\int_n^{n+1} f'(x) dx \right) \\
 &= (f(n+1) - f(n)) C(n). \tag{5}
 \end{aligned}$$

类似可证

$$\begin{aligned}
 \int_a^{[a+1]} C(x) f'(x) dx &= 0, \\
 \int_{[b]}^b C(x) f'(x) dx &= C(b)(f(b) - f([b])). \tag{6}
 \end{aligned}$$

因此, 由(3) 可得

$$\sum_{a < n \leq b} C_n f(n) = C(b)f([b]) + \sum_{[a]+1 \leq n \leq [b]-1} C(n)(f(n) - f(n+1))$$

$$\begin{aligned}
&= C(b)f([b]) - \sum_{[a]+1 \leq n \leq [b]-1} \int_n^{n+1} C(x)f'(x)dx \\
&= C(b)f([b]) - \int_{[a]+1}^{[b]} C(x)f'(x)dx \\
&= - \int_a^b C(x)f'(x)dx + C(b)f(b),
\end{aligned}$$

引理成立。当 $[b] = [a]$ 或 $[b] = [a] + 1$, 利用(3)与(6)可立即验证本引理。证毕。

推论 1.1.4 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续的导函数, $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$, 则

$$\begin{aligned}
\sum_{a < n \leq b} f(n) &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \psi(x)f'(x)dx + \psi(a)f(a) \\
&\quad - \psi(b)f(b).
\end{aligned}$$

特别地, 由此我们还得知 $\psi(x)f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积(事实上, 由 $\psi(x)$ 有界且仅在整点处不连续, 故 $\psi(x)f'(x)$ 是 $[a, b]$ 上 Riemann 可积的, 这可与(5)类似地直接证明)。

证明: 在引理 1.1.3 中取 $C_n = 1$, 则

$$\sum_{a < n \leq b} f(n) = \int_a^b ([x] - [a])f'(x)dx + ([b] - [a])f(b).$$

因为 $[x] - [a] = x - a + \psi(a) - \psi(x)$, 所以

$$\begin{aligned}
\int_a^b ([x] - [a])f'(x)dx &= f(b)(b - a) + \psi(a)(f(b) \\
&\quad - f(a)) - \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f'(x)\psi(x)dx,
\end{aligned}$$

又

$$([b] - [a])f(b) = (b - a)f(b) + (\psi(a) - \psi(b))f(b),$$

合并各项即可知本推论成立。证毕。

关于 $\Gamma(s)$, 我们有

定理 1.1.5 (i) 函数

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{s-1} dt$$

表示 $\operatorname{Re} s > 0$ 上的一个解析函数。

(ii) $\Gamma(s)$ 可解析开拓至全 s 平面上除去原点及负整数外的开连通集 Ω_1 上, 并满足关系式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ 。 $\Gamma(s)$ 仅在 $s = 0, -1, -2, \dots$ 处有单重极点, 相应的残数都是 1。

(iii) $\Gamma(s)$ 没有零点。当 s 位于复 s 平面上去掉原点及负实轴的开集 Ω_2 中时,

$$\Gamma(s) = \exp\left(\left(s + \frac{1}{2}\right)\log(s+1) - s - \log s + \int_1^{\infty} \frac{\sigma(x)}{x^2} dx - \int_1^{\infty} \frac{\sigma(x)}{(s+x)^2} dx\right),$$

其中 $\sigma(x) = \int_0^x \psi(u) du$, $\psi(u) = u - [u] - \frac{1}{2}$ 。

(iv) 当 $s = \tau + it \in \Omega_2$, τ 与 t 为实数, 且 $|t| \geq 1$ 时,

$$|\Gamma(s)| = c |t|^{\tau - \frac{1}{2}} e^{-\frac{\pi}{2}|t|} \left(1 + O\left(\frac{(|\tau| + 1)^3}{|t|}\right)\right),$$

其中 $c = \exp\left(1 + \int_1^{\infty} \frac{\sigma(x)}{x^2} dx\right)$ 。

(v) 当 $s \in \Omega_2$ 时,

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log(s+1) - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{s} + 2 \int_1^{\infty} \frac{\sigma(x) dx}{(s+x)^3}.$$

特别地, 当 $s = \tau + it$, $|t| \geq c_1 > 0$, 或 $0 < c_2 \leq |\tau| \leq c_3 < 1$,

或 $\tau \geq \frac{1}{2}$ (c_i 为绝对常数) 时

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log(s+1) + O\left(\frac{|\tau| + 1}{|t|}\right).$$

证明: (i) 在引理 1.1.1 中取 $f(t, s) = e^{-t} t^{s-1}$ 以及 $G(t) =$

t^{d-1} (当 $d \leq \operatorname{Re} s \leq 3d$ 时), $K(t) = e^{-\frac{t}{2}}$ 。

对任意的 $d > 0$, 由于当 $d \leq \operatorname{Re} s \leq 3d$ 时,

$$\begin{aligned} |f(t, s)| &\leq G(t), \text{ 若 } 0 < t \leq 1, \\ |f(t, s)| &= O(K(t)), \text{ 若 } 1 \leq t < \infty, \end{aligned}$$

且极限

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^1 G(t) dt = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \frac{1}{d} (1 - \delta^d) = \frac{1}{d}$$

与

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_1^x K(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2(e^{-\frac{1}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}) = 2e^{-\frac{1}{2}}$$

都存在,因此立即得(i)。

(ii) 当 $\operatorname{Res} > 1$ 时,由分部积分可得(严格地说,应将积分先拆成 $\int_0^1 + \int_1^{\infty}$,后将两个积分分别写成极限,对于有限区间上的积分先分别分部积分,再取极限)

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^s dt = -e^{-t} t^s \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = s\Gamma(s)。$$

这一关系式启发我们可将 $\Gamma(s)$ 由 $\operatorname{Res} > 0$ 解析开拓至整个 s 平面中去掉原点及负整数的开连通集 Ω_1 上去。对任给的复数 $s \in \Omega_1, \operatorname{Res} \leq 0$,可找到唯一的正整数 N ,使得 $-N < \operatorname{Res} \leq 1 - N$,这时令

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+N)}{(s+1)(s+2)\cdots(s+N-1)}。 \quad (7)$$

则由(i),以这种方式我们定义了 Ω_1 上的一个解析函数。由 $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ 不难验证 $\Gamma(s)$ 在极点 $s = 0, -1, -2, \dots$ 处的残数为

$$\lim_{s \rightarrow 0} s\Gamma(s) = \Gamma(1) = 1,$$

且这些极点都是单重极点。

(iii) 设 n 为充分大自然数。由引理 1.1.2 的(i)可知当 $0 \leq t < n$ 时,

$$e^{-\frac{t}{n}} \geq 1 - \frac{t}{n}, e^{-t} \geq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n,$$

并且显然当 $t = n$ 时此式也成立。由引理 1.1.2 的(ii) 可知当 $0 \leq \frac{t}{n} \leq \frac{1}{2}$ 时,

$$e^{\frac{t}{n}}(1 - \frac{t}{n}) \geq e^{-\left(\frac{t}{n}\right)^2}, \quad e^t(1 - \frac{t}{n})^n \geq e^{-\frac{t^2}{n}}.$$

所以

$$e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n = e^{-t}(1 - e^t(1 - \frac{t}{n})^n) \leq e^{-t}(1 - e^{-\frac{t^2}{n}}).$$

若 $t < \sqrt{n}$, 由引理 1.1.2 的(i) 有

$$e^{-\frac{t^2}{n}} \geq 1 - \frac{t^2}{n},$$

而若 $\frac{n}{2} \geq t \geq \sqrt{n}$, 则显然此不等式也成立。所以

$$e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}, 0 \leq t \leq \frac{n}{2}.$$

此式在 $\frac{n}{2} < t \leq n$ 时是显然的。综合这些估计, 在 $0 \leq t \leq n$ 时, 我们有

$$0 \leq e^{-t} - (1 - \frac{t}{n})^n \leq t^2 e^{-t} n^{-1}.$$

由此, 对于实的 $s, s > 1$, 得到

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^n e^{-t} t^{s-1} dt - \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{s-1} dt \leq \frac{1}{n} \int_0^n t^{s+1} e^{-t} dt \\ &\leq \frac{1}{n} \Gamma(s+2). \end{aligned}$$

令 $n \rightarrow \infty$, 得

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n t^{s-1} dt.$$

做变量替换, 不断分部积分可得

$$\begin{aligned}
\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{s-1} dt &= n^s \left(\int_0^1 (1 - \omega)^n \omega^{s-1} d\omega\right) \\
&= \frac{n^{s+1}}{s} \left(\int_0^1 \omega^s (1 - \omega)^{n-1} d\omega\right) \\
&= n^s \cdot \frac{n(n-1)}{s(s+1)} \left(\int_0^1 \omega^{s+1} (1 - \omega)^{n-2} d\omega\right) \\
&= \cdots \\
&= \frac{n^s \cdot n!}{s(s+1) \cdots (s+n)} \circ
\end{aligned}$$

所以,当 $s > 1$ 时,

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n! \cdot n^s}{s(s+1) \cdots (s+n)} \right) \circ$$

令 $P_n(s) = (1+s)(1+\frac{s}{2}) \cdots (1+\frac{s}{n})$, 则(设 $s > 1$)

$$\log P_n(s) = \log(1+s) + \sum_{2 \leq k \leq n} \log\left(1 + \frac{s}{k}\right).$$

在推论 1.1.4 中取 $f(n) = \log(1 + \frac{s}{n})$, 可得

$$\begin{aligned}
\sum_{1 < k \leq n} \log\left(1 + \frac{s}{k}\right) &= \int_1^n \log\left(1 + \frac{s}{x}\right) dx - \int_1^n \frac{s\psi(x)}{x(s+x)} dx \\
&\quad - \frac{1}{2} \log(1+s) + \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{s}{n}\right) \\
&= \left(n+s+\frac{1}{2}\right) \log(s+n) - \left(s+\frac{3}{2}\right) \log(s+1) \\
&\quad - \left(n+\frac{1}{2}\right) \log n - \int_1^n \frac{s\psi(x)}{x(s+x)} dx \circ
\end{aligned}$$

令 $\sigma(x) = \int_0^x \psi(u) du$, 这是 x 的连续函数。设 $k(x)$ 为某个区间 $[\alpha, \beta]$ 上的连续可导函数, α 及 β 为整数, 我们来证明

$$\int_{\alpha}^{\beta} \psi(x) k(x) dx = - \int_{\alpha}^{\beta} \sigma(x) k'(x) dx. \quad (8)$$

为此, 只需证明, 当 m 为整数且 $[m, m+1] \subseteq [\alpha, \beta]$ 时,

$$\int_m^{m+1} \psi(x) k(x) dx = - \int_m^{m+1} \sigma(x) k'(x) dx. \quad (9)$$

任给 $\varepsilon > 0, \varepsilon$ 充分小, 我们可由当 $m \leq x \leq m+1-\varepsilon$ 时 $\psi(x) =$

$x - m - \frac{1}{2}$ 及

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= \left(\int_0^1 + \int_1^2 + \cdots + \int_m^x \right) \psi(u) dx = \int_m^x \psi(u) du \\ &= \int_0^{x-m} \psi(v) dv = \frac{1}{2}(x^2 - 2mx + m^2) - \frac{1}{2}(x - m),\end{aligned}$$

(注意: $\psi(u)$ 是周期为 1 的函数, 且 $\int_0^1 \psi(u) du = 0$), 分部积分得到

$$\int_m^{m+1-\varepsilon} \sigma(x) k'(x) dx = k(x) \sigma(x) \Big|_m^{m+1-\varepsilon} - \int_m^{m+1-\varepsilon} \psi(x) k(x) dx.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 即得(9), 再对 n 求和可得(8)。由(8) 易得

$$\begin{aligned}\int_1^n \frac{s\psi(x)}{x(x+s)} dx &= \int_1^n \psi(x) \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+s} \right) dx \\ &= - \int_1^n \frac{\sigma(x)}{x^2} dx + \int_1^n \frac{\sigma(x)}{(x+s)^2} dx.\end{aligned}$$

由此可得

$$\begin{aligned}\log(1+s) + \sum_{1 < k \leq n} \log\left(1 + \frac{s}{n}\right) &= (n+s+\frac{1}{2})\log(s+n) \\ &\quad - (s+\frac{1}{2})\log(s+1) - (n+\frac{1}{2})\log n \\ &\quad - \int_1^n \frac{\sigma(x)}{x^2} dx + \int_1^n \frac{\sigma(x)}{(x+s)^2} dx.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}P_n(s) &= (s+n)^{n+s+\frac{1}{2}} n^{-n-\frac{1}{2}} (s+1)^{-s-\frac{1}{2}} \exp\left(- \int_1^n \frac{\sigma(x)}{x^2} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_1^n \frac{\sigma(x)}{(s+x)^2} dx \right).\end{aligned}$$

于是, 对实的 $s, s > 1$, 我们有(注意: $\sigma(x) = O(1)$)

$$\Gamma(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^s}{s P_n(s)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n}{s+n} \right)^s \left(1 + \frac{s}{n} \right)^{-(n+\frac{1}{2})} \times \right.$$

$$(s+1)^{s+\frac{1}{2}}s^{-1}\exp\left(\int_1^n\frac{\sigma(x)}{x^2}dx-\int_1^n\frac{\sigma(x)}{(s+x)^2}dx\right).$$

因为

$$\lim_{n\rightarrow\infty}\left(\frac{n}{s+n}\right)^s=1, \lim_{n\rightarrow\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}}=\lim_{n\rightarrow\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-n}=e^{-s},$$

所以, 当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时,

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \exp\left((s+\frac{1}{2})\log(s+1)-\log s-s+\int_1^\infty\frac{\sigma(x)}{x^2}dx\right. \\ &\quad \left.-\int_1^\infty\frac{\sigma(x)}{(x+s)^2}dx\right).\end{aligned}\quad (10)$$

由(ii) 可知此式左、右两端均为 Ω_2 上的解析函数(注意,

$\int_1^\infty\sigma(x)(x+s)^{-2}dx$ 为 Ω_2 上的解析函数, 这可与引理 1.1.1 的证

明类似地推导), 因此由解析开拓可知(10) 当 $s \in \Omega_2$ 时也成立。

若 s 为负实数, 且 s 不为整数, 则由

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= \Gamma(s+1)\frac{1}{s} = \cdots \\ &= \Gamma(s+N)\frac{1}{s(s+1)\cdots(s+N-1)}, s+N > 1,\end{aligned}$$

可知 $\Gamma(s) \neq 0$ 。若 s 不为负实数, 则由(10) 立即知道 $\Gamma(s) \neq 0$ 。

所以 $\Gamma(s)$ 无零点。

(iv) 设 $s = \tau + it, |t| \geq 1, \tau$ 及 t 为实数。则

$$\log(s+1) = \log\sqrt{(\tau+1)^2+t^2} + i\theta_1, -\pi < \theta_1 < \pi,$$

$$\log s = \log\sqrt{\tau^2+t^2} + i\theta_2, -\pi < \theta_2 < \pi.$$

由

$$\log(1+X) = O(X), X > 0,$$

得

$$(s+\frac{1}{2})\log(s+1)-\log s = (\tau-\frac{1}{2})\log|t| - i\theta_1$$

$$+ \lambda i + O\left(\frac{(|\tau| + 1)^3}{t}\right), \quad (11)$$

其中 λ 为一个实数。应用 Taylor 展开式可得

$$\cos\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{1}{2}\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right)^2 + O\left(\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right)^4\right),$$

又

$$\begin{aligned} \cos\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right) &= \sin \theta_1 = \left(1 + \frac{(\tau + 1)^2}{t^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ &= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\tau + 1}{t}\right)^2 + O\left(\left(\frac{\tau + 1}{t}\right)^4\right), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\tau + 1}{t}\right)^2 \left(1 + O\left(\left(\frac{\tau + 1}{t}\right)^2\right)\right) \\ &= \left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right)^2 \left(1 + O\left(\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right)^2\right)\right). \end{aligned} \quad (12)$$

熟知, 成立不等式

$$\frac{2}{\pi} \leq \left| \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right| \leq 1, \quad |\varphi| \leq \frac{\pi}{2}.$$

设 $t > 0$ 。当 $0 < \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ 时, 由

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = \cos \theta_1 = O\left(\frac{|\tau| + 1}{t}\right)$$

可得 $\left|\frac{\pi}{2} - \theta_1\right| \ll \frac{|\tau| + 1}{t}$ 。当 $\frac{\pi}{2} < \theta_1 \leq \pi$ 时, 由

$$\sin\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \theta_1 = O\left(\frac{|\tau| + 1}{t}\right),$$

也得 $\left|\frac{\pi}{2} - \theta_1\right| \ll \frac{|\tau| + 1}{t}$ 。所以 $\left|\frac{\pi}{2} - \theta_1\right| = O\left(\frac{|\tau| + 1}{t}\right)$ 总成

立。由 (12) 及 $(1 + |X|)^{\frac{1}{2}} = 1 + O(|X|)$, 可得

$$\frac{|\tau + 1|}{t} \left(1 + O\left(\left(\frac{|\tau| + 1}{t}\right)^2\right)\right)$$

$$= \left| \theta_1 - \frac{\pi}{2} \right| \left(1 + O\left(\left(\frac{|\tau| + 1}{t} \right)^2 \right) \right). \quad (13)$$

若 $\tau + 1 > 0$, 则 $\cos \theta_1 > 0$, $0 \leq \theta_1 < \frac{\pi}{2}$, $(\tau + 1)\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) > 0$,

若 $\tau + 1 < 0$, 则 $\cos \theta_1 < 0$, $\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 < \pi$, $(\tau + 1)\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) > 0$,

所以当 $t > 0$ 时, $(\tau + 1)\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) > 0$ 总成立。因此由 (13) 得到

$$\frac{\tau + 1}{t} \left(1 + O\left(\left(\frac{|\tau| + 1}{t} \right)^2 \right) \right) = \left(\frac{\pi}{2} - \theta_1 \right) \left(1 + O\left(\left(\frac{|\tau| + 1}{t} \right)^2 \right) \right),$$

$$t\theta_1 = -\tau - 1 + \frac{\pi}{2}t + O\left(\frac{(|\tau| + 1)^3}{t} \right).$$

当 $t < 0$ 时, $\sin \theta_1 < 0$, $-\pi < \theta_1 < 0$ 。令 $\theta'_1 = -\theta_1$, $t' = -t$, 可得

$$\sin \theta'_1 = \frac{t'}{\sqrt{(\tau + 1)^2 + (t')^2}}, \quad \cos \theta'_1 = \frac{\tau + 1}{\sqrt{(\tau + 1)^2 + (t')^2}}.$$

则同样地可得

$$t\theta_1 = t'\theta'_1 = -\tau - 1 + \frac{\pi}{2}t' + O((|\tau| + 1)^3 |t|^{-1}).$$

所以我们总有

$$t\theta_1 = -\tau - 1 + \frac{\pi}{2}|t| + O((|\tau| + 1)^3 |t|^{-1}), \quad |t| \geq 1.$$

将此代入 (11), 得

$$\begin{aligned} |\Gamma(s)| &= c \exp \left(\left(\tau - \frac{1}{2} \right) \log |t| - \frac{\pi}{2} |t| \right. \\ &\quad \left. + O((|\tau| + 1)^3 |t|^{-1}) + \operatorname{Re} \left(\int_1^\infty \frac{\sigma(x)}{(x+s)^2} dx \right) \right), \end{aligned}$$

其中 $c = \exp \left(1 + \int_1^\infty \sigma(x) x^{-2} dx \right)$ 。我们有

$$\begin{aligned} \left| \int_1^\infty \frac{\sigma(x)}{(x+s)^2} dx \right| &\ll \int_1^{2|s|} |t|^{-2} dx + \int_{2|s|}^\infty x^{-2} dx \\ &= O((|\tau| + 1) |t|^{-1}), \end{aligned}$$

因此(iv)得证。

(v) 当 $s \in \Omega_2$ 时, 在(10)两边通过求导可得

$$\Gamma'(s) = \Gamma(s) \cdot \left(\log(s+1) - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{s} + 2 \int_1^\infty \frac{\sigma(x)}{(s+x)^3} dx \right),$$

所以

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log(s+1) - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{s} + 2 \int_1^\infty \frac{\sigma(x)}{(s+x)^3} dx.$$

应用引理 1.1.1 的(ii) 的类似证法, 可证此右端的积分在 $\{s \mid |s| < 1\}$ 上解析, 因此由解析开拓, 可知此式在 $\{s \mid 0 < |s| < 1\}$ 上成立。当 $s = \tau + it$, $|t| \geq c_1 > 0$, 或 $0 < c_2 \leq |\tau| \leq c_3 < 1$, 或 $\tau \geq \frac{1}{2}$ 时,

$$\frac{1}{|s|}, \frac{1}{|s+1|} \ll \frac{1}{|t|+1},$$

并且(利用 $|\sigma(x)| \ll 1$)

$$\begin{aligned} \left| \int_1^\infty \frac{\sigma(x)}{(s+x)^3} dx \right| &\ll \int_1^T \frac{1}{(|t|+1)^3} dx + \int_T^\infty \frac{dx}{x^3} \\ &\ll \frac{|t|+2|\tau|}{(|t|+1)^3}, T = 2|t| + 2|\tau|, \end{aligned}$$

所以

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log(s+1) + O\left(\frac{|\tau|+1}{|t|+1}\right).$$

证毕。

练 习

(I) 用定义和证明引理 1.1.1 的(i) 的类似方法, 证明引理 1.1.1 的(ii)。

(II) 直接应用定理 1.1.5 的(iii), 证明当 $s \in \Omega_2$ 时, $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ 。

§ 1.2 特征与特征和

设 q 为正整数。模 q 的一个特征函数 $\chi(n)$ 是一个对所有整数 n 有定义的、周期为 q 的完全积性复值函数, 并且当 $(n, q) = 1$ 时, $|\chi(n)| = 1$, 而当 $(n, q) > 1$ 时, 则 $\chi(n) = 0$ 。若当 $(n, q) = 1$ 时 $\chi(n) = 1$ 总成立, 则称 $\chi(n)$ 为主特征。模 q 的主特征通常记为 $\chi_q^0(n)$, 或 $\chi_0(n)$ 。显然, 模 q 的主特征函数是唯一的。若模 q 的非主特征 $\chi(n)$ 的最小正周期恰好是 q , 则称 $\chi(n)$ 为原特征。由定义易导出 $\chi(1) = 1$ 。由此容易看到, 当 $q = 1$ 和 $q = 2$ 时, 模 q 仅有主特征。若 $\chi(n)$ 为模 q 的一个非主、非原特征, 则用带余除法容易证明存在某个正整数 $q_1, q_1 | q, 1 < q_1 < q$, 使得 q_1 为 $\chi(n)$ 的最小正周期, 从而当 $(n, q) = 1$ 时, $\chi(n + q_1) = \chi(n)$ 总成立。若 $\chi_1(n)$ 及 $\chi_2(n)$ 分别为模 q_1 及 q_2 的特征, 则显然 $\chi_1(n)\chi_2(n)$ 为模 $[q_1, q_2]$ 的特征, 这里 $[q_1, q_2]$ 为 q_1 与 q_2 的最小公倍数。只取实值的特征称为实特征, 否则称为复特征。既为实特征又为原特征的特征, 称为实原特征。

我们研究特征的性质。先证一个引理。

引理 1.2.1 (i) 若 $q = 2^\alpha, \alpha$ 为整数, $\alpha \geq 3$, 则当 $2 \nmid n$ 且 n 为整数时, 存在唯一的一组满足 $0 \leq \alpha(n) \leq 1, 1 \leq \beta(n) \leq 2^{\alpha-2}$ 的整数 $\{\alpha(n), \beta(n)\}$, 使得

$$n \equiv (-1)^{\alpha(n)} 5^{\beta(n)} \pmod{2^\alpha}.$$

(ii) 对任意的正整数 $q, q \geq 3$, 当 a 为正整数, $(a, q) = 1$ 且 $a \not\equiv 1 \pmod{q}$, 存在一个模 q 的特征 $\chi(n)$, 使得 $\chi(a) \neq 1$ 。

证明: (i) 用数学归纳法容易证明

$$5^{2^{k-2}} \equiv 1 \pmod{2^k}, 5^{2^{k-2}} \not\equiv 1 \pmod{2^{k+1}}, k \geq 2.$$

由此不难验证: $2^{\alpha-1} (= \varphi(q))$ 个整数

$$-5^{2^{\alpha-2}}, -5^{2^{\alpha-2}-1}, \dots, -5^2, -5, 5, 5^2, \dots, 5^{2^{\alpha-2}-1}, 5^{2^{\alpha-2}}$$

模 2^α 互不同余, 从而构成模 2^α 的一个缩系。于是, 对每个整数 n , 都存在唯一的一组整数 $\{\alpha(n), \beta(n)\}$, 使得

$$\alpha(n) = 0 \text{ 或 } 1, 1 \leq \beta(n) \leq 2^{\alpha-2}, n \equiv (-1)^{\alpha(n)} 2^{\beta(n)} \pmod{2^\alpha}。$$

(ii) 由 $a \not\equiv 1 \pmod{q}, (a, q) = 1$, 必存在一个素数 p 和一个正整数 α , 使得 $p^\alpha | q, a \not\equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ 。我们分三种情况。

(a) 若 p 为奇素数, 设 g 为模 p^α 的一个原根, 当 $(n, p) = 1$ 时, $v(n)$ 为满足

$$n \equiv g^{v(n)} \pmod{p^\alpha}, 1 \leq v(n) \leq \varphi(p^\alpha)$$

的唯一整数(即“指数”)。令

$$\chi_1(n) = \begin{cases} e\left(\frac{v(n)}{\varphi(p^\alpha)}\right), & \text{若 } p \nmid n, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

其中 $e(\xi) = e^{2\pi i \xi}, \chi(n) = \chi_1(n)\chi_0(n), \chi_0$ 为模 q 的主特征。则易知 $\chi_1(n)$ 为模 p^α 的特征, $\chi(n)$ 为模 q 的特征, 且 $\chi(a) = \chi_1(a) \neq 1$ 。

(b) 若 $p = 2$, 则 $\alpha \geq 2$ 。当 $\alpha = 2$ 时, 令

$$\chi_1(n) = \begin{cases} (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & \text{若 } 2 \nmid n, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

并令 $\chi(n) = \chi_1(n)\chi_0(n)$ 。则 $\chi_1(n)$ 为模 4 的特征, $\chi(n)$ 为模 q 的特征, 而我们有 $\chi(a) = \chi_1(a) \neq 1$ 。

(c) 当 $p = 2, \alpha \geq 3$ 时, 对每个整数 $n, (n, 2) = 1$, 由 (i) 知存在唯一一组整数 $\{\alpha(n), \beta(n)\}$, 满足

$$0 \leq \alpha(n) \leq 1, 1 \leq \beta(n) \leq 2^{\alpha-2}, n \equiv (-1)^{\alpha(n)} 5^{\beta(n)} \pmod{2^\alpha}。$$

由 $a \not\equiv 1 \pmod{2^\alpha}$, 可知 $\{\alpha(a), \beta(a)\} \neq \{0, 2^{\alpha-2}\}$ 。当 $\beta(a) =$

2^{a-2} 时, $\alpha(a) \neq 0$, 这时令

$$\chi_1(n) = \begin{cases} (-1)^{\alpha(n)}, & \text{若 } 2 \nmid n, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

及 $\chi(n) = \chi_1(n)\chi_0(n)$ 。当 $\beta(a) \neq 2^{a-2}$ 时, 令

$$\chi_1(n) = \begin{cases} e\left(\frac{\beta(n)}{2^{a-2}}\right), & \text{若 } 2 \nmid n, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

并令 $\chi(n) = \chi_1(n)\chi_0(n)$ 。两种情况下, $\chi_1(n)$ 总是模 2^a 的特征, $\chi(n)$ 总是模 q 的特征, 且 $\chi(a) = \chi_1(a) \neq 1$ 。证毕。

定理 1.2.2 (i) 模 q 共有 $\varphi(q)$ 个特征(函数)。

(ii) 设 a 和 n 为整数, $(an, q) = 1$, 则

$$\sum_{\chi} \chi(n) \overline{\chi}(a) = \begin{cases} \varphi(q), & \text{若 } n \equiv a \pmod{q}, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

这里求和过模 q 的所有特征。

(iii) 设 χ 为模 q 的特征, 则

$$\sum_a \chi(a) = \begin{cases} \varphi(q), & \text{若 } \chi = \chi_0, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

其中 a 通过模 q 的一个完全剩余系。

(iv) 设 $q = q_1^{a_1} \cdots q_n^{a_n}$ 为 q 的标准素因子分解式, 则模 q 的每个特征 χ 都可唯一地分解为乘积 $\chi_1 \cdots \chi_n$, 其中 χ_i 为模 $q_i^{a_i}$ 的特征, 并且, χ 为模 q 的主特征, 当且仅当每个 χ_i 为模 $q_i^{a_i}$ 的主特征, 而 χ 为模 q 的原特征, 则当且仅当每个 χ_i 为模 $q_i^{a_i}$ 的原特征。

(v) 模 1 和模 2 的特征仅有主特征。设 $q \geq 3$, 若 q 为素数, 则每个模 q 的非主特征都是原特征。若 q 不为素数, 则对每个模 q 的非主、非原的特征 χ , 都存在唯一的正整数 q' , $3 \leq q' < q$, $q' \mid q$, 以及模 q' 的唯一的原特征 χ_1 , 使得 $\chi(n) = \chi_0(n)\chi_1(n)$, 其中 $\chi_0(n)$ 为模 q 的主特征(这时我们称 $\chi(n)$ 是由 $\chi_1(n)$ 诱导

的)。

(vi) 设 χ_i 为模 q_i 的原特征, $i = 1, 2$ 。用 $\overline{\chi_2}(n) = \overline{\chi_2(n)}$ 记 $\chi_2(n)$ 的共轭特征。若模 $[q_1, q_2]$ 的特征 $\chi_1 \overline{\chi_2}$ 为主特征, 则必 $q_1 = q_2$, 且 $\chi_1(n) = \chi_2(n)$ 。

证明: (i)、(ii)、(iii) 的证明。设 $a_1, a_2, \dots, a_{\varphi(q)}$ 为模 q 的一个给定的缩剩余系。对每个模 q 的特征 $\chi(n)$, 令它相应于一个有序数组

$$A(\chi) = \{\chi(a_1), \chi(a_2), \dots, \chi(a_{\varphi(q)})\}.$$

显然, 若 $\chi_1 \neq \chi_2$, 则有某个 a_i 使得 $\chi_1(a_i) \neq \chi_2(a_i)$, 从而 $A(\chi_1) \neq A(\chi_2)$ 。但由 Fermat 小定理可知, 对每个 a_j 都有

$$a_j^{\varphi(q)} \equiv 1 \pmod{q},$$

故

$$(\chi(a_j))^{\varphi(q)} = \chi(a_j^{\varphi(q)}) = \chi(1) = 1,$$

从而 $\chi(a_j)$ 为一个 $\varphi(q)$ 次单位根。不妨设

$$\chi(a_j) = \exp\left(\frac{2\pi i c_j}{\varphi(q)}\right) = e\left(\frac{c_j}{\varphi(q)}\right),$$

c_j 为某个整数。因为形如

$$\left\{ e\left(\frac{c_1}{\varphi(q)}\right), e\left(\frac{c_2}{\varphi(q)}\right), \dots, e\left(\frac{c_{\varphi(q)}}{\varphi(q)}\right) \right\}$$

不同的数组不超过 $(\varphi(q))^{\varphi(q)}$ 个, 所以仅有有限个不同的特征函数。设模 q 有 c 个特征函数, $c \geq 1$ 。设 $(a, q) = 1$, 并令

$$S(a) = \sum_{\chi} \chi(a),$$

这里求和过模 q 的一切特征。若 $a \equiv 1 \pmod{q}$, 则显然 $S(a) = c$ 。设 $a \not\equiv 1 \pmod{q}$, 于是存在一个素数 p 和一个正整数 $\alpha \geq 1$, 使得 $p^\alpha | q$, $a \not\equiv 1 \pmod{p^\alpha}$ 。由引理 1.2.1 的(ii), 可知存在一个模 q 的特征 ψ , 使得 $\psi(a) \neq 1$ 。注意到, 若 χ_1, \dots, χ_c 为模 q 的所有不同

特征, 则 $\psi\chi_1, \psi\chi_2, \dots, \psi\chi_c$ 也表示模 q 的全体不同特征。因此

$$\psi(a) \cdot S(a) = \sum_x \psi(a)\chi(a) = S(a),$$

由此可得 $S(a) = 0$ 。设 χ 为模 q 的任一特征, 令

$$S_1(\chi) = \sum \chi(a),$$

这里 a 通过模 q 的任一个缩系。当 $\chi = \chi_0$ 时, 显然 $S_1(\chi) = \varphi(q)$ 。当 $\chi \neq \chi_0$ 时, 必有一个整数 b , $(b, q) = 1$, 使得 $\chi(b) \neq 1$ 。因为当 a 通过模 q 的一个缩系时, ab 也是如此, 所以

$$\chi(b)S_1(\chi) = \sum_a \chi(ab) = S_1(\chi),$$

由此得到 $S_1(\chi) = 0$ 。根据

$$\sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} S(a) = c, \quad \sum_{\chi} S_1(\chi) = \varphi(q)$$

和

$$\sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} S(a) = \sum_{\chi} S_1(\chi),$$

可得 $c = \varphi(q)$ 。对给定的 a , $(a, q) = 1$, 设 $(b, q) = 1$, b 满足 $ab \equiv 1 \pmod{q}$, 则由

$$\chi(ab) = \chi(a)\chi(b) = 1$$

可知 $\overline{\chi}(a) = \chi(b)$ 。所以, 当 $(n, q) = 1$ 时, 根据已证明的关于 $S(a)$ 的结论, 我们得

$$\begin{aligned} \sum_x \chi(n)\overline{\chi}(a) &= \sum_x \chi(n)\chi(b) = \sum_x \chi(nb) \\ &= \begin{cases} \varphi(q), & \text{若 } n \equiv a \pmod{q}, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases} \end{aligned}$$

(i)、(ii)、(iii) 证毕。

(iv) 的证明。设 $\chi(n)$ 为模 q 的任一特征, 并设 $q = q_1^{a_1} \cdots q_r^{a_r}$ 为 q 的标准素因子分解式。我们用 χ 构造模 $q_i^{a_i}$ 的特征 χ_i 。由孙子定理, 对任一整数 m , $(m, q_i) = 1$, 可选取一个整数 n , $(n, q) =$

1, 满足

$$n \equiv m \pmod{q_i^{\alpha_i}}, n \equiv 1 \pmod{q_j^{\alpha_j}}, j \neq i.$$

这时, 令 $\chi_i(m) = \chi(n)$ 。不难验证 χ_i 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的特征, 并且 $\chi = \chi_1 \cdots \chi_r$ 。显然, 若 χ 为模 q 的主特征, 则 χ_i 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的主特征。反之, 若 χ_i 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的主特征, $1 \leq i \leq r$, 则显然 $\prod_{1 \leq i \leq r} \chi_i$ 为模 q 的主特征。我们断言: 若

$$\chi(n) = \chi_1(n) \cdots \chi_r(n) = \chi'_1(n) \cdots \chi'_r(n),$$

并且 χ_i 和 χ'_i 都是模 $q_i^{\alpha_i}$ 的特征, 则必有 $\chi_i(n) = \chi'_i(n)$, $1 \leq i \leq r$ 。为证明这个结论, 当 $(m, q_i) = 1$ 时, 我们可用孙子定理, 选取一个整数 n , $(n, q) = 1$, 满足

$$n \equiv m \pmod{q_i^{\alpha_i}}, n \equiv 1 \pmod{q_j^{\alpha_j}}, j \neq i.$$

然后, 将 n 代入上述等式中, 即得 $\chi_i(m) = \chi'_i(m)$ 。这说明 χ 可按我们构作的方式唯一地分解为若干特征的乘积。对模 q 的特征 χ 的上述乘积分解, 若 χ 为模 q 的原特征, 则 χ_i 必为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的原特征, 因为若不然, 则有 $0 \leq \beta_i < \alpha_i$, 使得当 $(n, q_i) = 1$ 时, $\chi_i(n + q_i^{\beta_i}) = \chi_i(n)$ 成立。这时, 令 $q' = q_i^{\beta_i} \prod_{j \neq i} q_j^{\alpha_j}$, 则对任意整数 n , $(n, q) = 1$, $\chi(n + q') = \chi(n)$ 成立, 而这与 χ 为模 q 的原特征的假设矛盾。反之, 若 χ_i 都是模 $q_i^{\alpha_i}$ 的原特征, $1 \leq i \leq r$, 则 χ 必是模 q 的原特征, 因为若不然, 必有 $1 \leq q' < q$, 且 $q' | q$, 使得 $\chi(n + q') = \chi(n)$ 当 $(n, q) = 1$ 时成立。设 $q = q_1^{\alpha_1} \cdots q_r^{\alpha_r}$, 而且 $q_i^{\beta_i} | q'$, $q_i^{\beta_i+1} \nmid q'$, $0 \leq \beta_i < \alpha_i$ 。任给整数 m , $q_i \nmid m$, 由孙子定理, 我们可选取两个整数 n_1 与 n_2 , 分别满足

$$n_1 \equiv m \pmod{q_i^{\alpha_i}}, \quad n_2 \equiv m + q_i^{\beta_i} \pmod{q_i^{\alpha_i}},$$

$$n_1 \equiv 1 \pmod{q_i^{\alpha_i}}, j \neq i, \quad n_2 \equiv 1 \pmod{q_j^{\alpha_j}}, j \neq i.$$

则我们看到 $n_1 \equiv n_2 \pmod{q'}$, 所以 $\chi(n_1) = \chi(n_2)$ 。但

$\chi(n_1) = \chi_i(n) = \chi_i(m), \chi(n_2) = \chi_i(n_2) = \chi_i(m + q_i^{\beta_i}),$
 所以 $\chi_i(m) = \chi_i(m + q_i^{\beta_i})$, 而这与 χ_i 是模 $q_i^{\alpha_i}$ 的原特征的假设矛盾。

(v)、(vi) 的证明。当 $q = 1$ 或 2 时, 显然模 q 仅有主特征(这也可以用(i)以及 $\varphi(1) = \varphi(2) = 1$ 来加以说明)。若 q 为素数, $q \geq 3$, 则每个模 q 的非主特征都是原特征, 因为否则由定义将有正整数 $q', 1 < q' < q$, 且 $q' | q$, 这是不可能的。设 q 不是素数, $q \geq 3$ 。由(iv)可知, 若 $q = q_1^{\alpha_1} \cdots q_r^{\alpha_r}$ 为 q 的标准素因子分解式, 则 $\chi = \chi_1 \cdots \chi_r, \chi_i$ 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的特征。某些 χ_i 可能为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的主特征, 因此, 当 $(n, q) = 1$ 时, 我们有 $\chi(n) = \chi'_1(n) \cdots \chi'_s(n), \chi'_i$ 为模 $p_i^{\beta_i}$ 的非主特征, $\{p_i, \beta_i\}$ 为某组 $\{q_j, \alpha_j\}$ 。对每个 i , 存在最小的 $r_i, 1 \leq r_i \leq \beta_i$, 使得当 $n_1 \equiv n_2 \pmod{p_i^{r_i}}$ 且 $p_i \nmid n_1 n_2$ 时, $\chi'_i(n_1) = \chi'_i(n_2)$ 。按定义, 这时 χ'_i 就是模 $p_i^{r_i}$ 的原特征, 因此, 由(iv)可知, $\psi(n) = \chi'_1(n) \cdots \chi'_s(n)$ 为模 $q' = \prod_{i=1}^s p_i^{r_i}$ 的原特征, $q' | q$ 。这样, 当 $(n, q) = 1$ 时, $\chi(n) = \psi(n)$ 成立, 故 $\chi(n) = \chi_1(n) \chi_0(n)$ 总成立。至于唯一性, 若 $\chi_0 \chi_1 = \chi_0 \chi_2, \chi_i(n)$ 为模 q_i 的原特征, $q_i | q, i = 1, 2$, 我们要证明 $q_1 = q_2, \chi_1(n) = \chi_2(n)$ 。设

$$q_1 = u_1^{\alpha_1} \cdots u_r^{\alpha_r}, \quad q_2 = v_1^{\beta_1} \cdots v_s^{\beta_s},$$

这里 u_1, \dots, u_r 为互不相同的素数, v_1, \dots, v_s 为互不相同的素数。则由(iv)可知有分解

$$\chi_1 = \chi_1^{(1)} \cdots \chi_r^{(1)}, \chi_2 = \chi_1^{(2)} \cdots \chi_s^{(2)} \quad (1)$$

这里 $\chi_i^{(1)}(n)$ 为模 $u_i^{\alpha_i}$ 的原特征, $\chi_j^{(2)}(n)$ 为模 $v_j^{\beta_j}$ 的原特征。若 $u_1 \neq v_1, \dots, v_s$, 对任意的整数 $m, (m, u_1) = 1$, 由孙子定理, 我们可找到一个正整数 n , 使得

$$n \equiv m \pmod{u_1^{\omega_1}}, \quad n \equiv 1 \pmod{qu_1^{-\omega_1}},$$

这里 ω_1 为满足 $u_1^{\omega_1} \mid q, u_1^{\omega_1+1} \nmid q$ 的正整数。由 $(n, q) = 1, \chi\chi_1 = \chi\chi_2$ 以及 (1), 可得 $\chi_1^{(1)}(m) = 1$, 这与 $\chi_1^{(1)}$ 为模 $u_1^{\alpha_1}$ 的原特征矛盾。不妨设 $u_1 = v_1$ 。若 $\alpha_1 < \beta_1$, 对任意的正整数 $m, (m, u_1) = 1$, 由孙子定理, 选取正整数 n , 使得

$$n \equiv m \pmod{u_1^{\beta_1}}, n \equiv 1 \pmod{qu_1^{-\omega_1}},$$

ω_1 定义同前。则 $(n, q) = 1$ 。由 $\chi_0\chi_1 = \chi_0\chi_2$ 及 (1), 可得 $\chi_1^{(1)}(m) = \chi_1^{(2)}(m)$, 则

$$\chi_1^{(2)}(m + u_1^{\alpha_1}) = \chi_1^{(1)}(m + u_1^{\alpha_1}) = \chi_1^{(1)}(m) = \chi_1^{(2)}(m),$$

这与 $\chi_1^{(2)}$ 为模 $u_1^{\alpha_2} = v_1^{\alpha_2}$ 的原特征矛盾。所以 $\alpha_1 \geq \alpha_2$ 。同理可得 $\alpha_1 \leq \alpha_2$, 因此 $\alpha_1 = \alpha_2$ 。类似地推理, 可得 $u_i^{\alpha_i} = v_i^{\beta_i}, \chi_i^{(1)} = \chi_i^{(2)}, r = s$ 。所以 $q_1 = q_2, \chi_1 = \chi_2$, 这就证明了唯一性。特别地, 若 χ_0 为模 $[q_1, q_2]$ 的主特征, χ_i 为模 q_i 的原特征, 使得 $\chi_1\bar{\chi}_2 = \chi_0$, 则当 $(n, [q_1, q_2]) = 1$ 时,

$$\chi_0(n)\chi_2(n) = \chi_1(n)\bar{\chi}_2(n)\chi_2(n) = \chi_1(n)\chi_0(n),$$

因此, 必有 $q_1 = q_2$ 及 $\chi_1(n) = \chi_2(n)$ 。

定理证毕。

设 χ 为模 q 的一个特征, 令

$$S(n, \chi) = \sum_{1 \leq a \leq q} \chi(a) e\left(\frac{na}{q}\right), e(\xi) = \exp(2\pi i \xi).$$

我们称这种和为 Gauss 和, 并特别记 $S(1, \chi)$ 为 $\tau(\chi)$ 。关于 Gauss 和, 我们有

定理 1.2.3 (i) 若 χ 为模 q 的特征, 则当 $(n, q) = 1$ 时

$$S(n, \chi) = \bar{\chi}(n) \cdot \tau(\chi),$$

并且等式当 χ 为原特征及 $(n, q) > 1$ 时也成立。

(ii) 若 χ 为模 q 的原特征, 则 $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$ 。若 χ 为模 q 的

任意特征, 则 $|\tau(\chi)| \leq \sqrt{q}$ 。

(iii) 当 χ 为模 q 的主特征 χ_0 时, 和 $S(n, \chi_0)$ 被称为 Ramanujan 和, 通常记为 $c_q(n)$, 其值为

$$c_q(n) = S(n, \chi_0) = \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} e\left(\frac{na}{q}\right) = \frac{\varphi(q)\mu(q/(q, n))}{\varphi(q/(q, n))}。$$

特别地, 当 $(q, n) = 1$ 时, $c_q(n) = \mu(q)$ 。

证明: (i) 若 $q = q_1 q_2$, $(q_1, q_2) = 1$, $\chi(a) = \chi_1(a)\chi_2(a)$, χ_i 为模 q_i 的特征, 则当 a_1 和 a_2 分别通过模 q_1 和 q_2 的一个缩系时, $a_1 q_2 + a_2 q_1$ 通过模 $q_1 q_2$ 的一个缩系, 故由

$$\begin{aligned} \chi(a_1 q_2 + a_2 q_1) &= \chi_1(a_1 q_2 + a_2 q_1) \chi_2(a_1 q_2 + a_2 q_1) \\ &= \chi_1(a_1 q_2) \chi_2(a_2 q_1) \\ &= \chi_1(a_1) \chi_1(q_2) \chi_2(a_2) \chi_2(q_1), \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} S(n, \chi) &= \chi_1(q_2) \chi_2(q_1) \left(\sum_{a_1} \chi_1(a_1) e\left(\frac{a_1 n}{q_1}\right) \right) \left(\sum_{a_2} \chi_2(a_2) e\left(\frac{a_2 n}{q_2}\right) \right) \\ &= \chi_1(q_2) \chi_2(q_1) S(n, \chi_1) S(n, \chi_2)。 \end{aligned} \quad (2)$$

若 $(n, q) = 1$, 令 \bar{n} 为满足 $\bar{n}n \equiv 1 \pmod{q}$ 的任一整数。当 b 通过模 q 的缩系时, $\bar{n}b$ 也通过模 q 的一个缩系。所以

$$\begin{aligned} S(n, \chi) &= \sum_{1 \leq b \leq q} \chi(\bar{n}b) e\left(\frac{n\bar{n}b}{q}\right) = \chi(\bar{n}) \left(\sum_{1 \leq b \leq q} \chi(b) e\left(\frac{b}{q}\right) \right) \\ &= \chi(\bar{n}) \cdot \tau(\chi)。 \end{aligned}$$

注意到 $\chi(\bar{n})\chi(n) = \overline{\chi}(n)\chi(n) = 1$, 上式可改写为

$$S(n, \chi) = \overline{\chi}(n) \tau(\chi)。 \quad (3)$$

若 χ 为模 q 原特征, 则当 $(n, q) > 1$ 时, (3) 式也成立, 为此只需证明 $S(n, \chi) = 0$ 。若 $q = q_1^{\alpha_1} \cdots q_r^{\alpha_r}$ 为 q 的标准素因子分解式, 则由定理 1.2.2 的 (iv), 可知有分解 $\chi = \chi_1 \cdots \chi_r$, χ_i 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的原特征。因为 $(n, q) > 1$, 所以必有一个 i , 使得 $q_i | n$, 不妨设 $i = 1$ 。则由

(2), 欲证 $S(n, \chi) = 0$, 仅需证明 $S(n, \chi_1) = 0$ 即可。简记 $p_1^a = p^a$ 。对每个 $a, 1 \leq a \leq p^a, a$ 可以唯一地表示为 $p^{a-1}u + v, 0 \leq u < p, 1 \leq v \leq p^{a-1}$ 。若 $a = 1$, 则显然

$$S(n, \chi_1) = \sum_{1 \leq a \leq p} \chi_1(a) = 0。$$

设 $a \geq 2$ 。则

$$\begin{aligned} S(n, \chi_1) &= \sum_{1 \leq a \leq p^a} \chi_1(a) e\left(\frac{an}{p^a}\right) \\ &= \sum_{0 \leq u < p} \sum_{1 \leq v \leq p^{a-1}} \chi_1(p^{a-1}u + v) e\left(\frac{(p^{a-1}u + v)n}{p^a}\right) \\ &= \sum_{\substack{1 \leq v \leq p^{a-1} \\ (v, p) = 1}} e\left(\frac{vn}{p^a}\right) \left(\sum_{0 \leq u < p} \chi_1(p^{a-1}u + v)\right)。 \end{aligned}$$

我们断言, 对每个整数 $v, p \nmid v$, 都有

$$S(v) = \sum_{0 \leq u < p} \chi_1(p^{a-1}u + v) = 0。$$

因为 χ_1 是模 p^a 的原特征, 由定义, 存在两个整数 ω_1 及 $\omega_2, p \nmid \omega_1 \omega_2, \omega_1 \equiv \omega_2 \pmod{p^{a-1}}$, 而 $\chi_1(\omega_1) \neq \chi_2(\omega_2)$ 。设 $\bar{\omega}_2$ 为满足 $\bar{\omega}_2 \omega_2 \equiv 1 \pmod{p^a}$ 的任一整数, 并令 $c = \omega_2 \bar{\omega}_2 = 1 + kp^{a-1}$ 。则 $\chi_1(c) \neq 1$ 。我们有

$$\begin{aligned} \chi_1(c) S(v) &= \sum_{0 \leq u < p} \chi_1(p^{a-1}cu + cv) \\ &= \sum_{0 \leq u < p} \chi_1(p^{a-1}(cu + kv) + v)。 \end{aligned}$$

因为当 u 通过模 p 的一个完全剩余系时, $cu + kv$ 也通过一个完全剩余系, 而 χ_1 是周期为 p^a 的函数, 所以 $\chi_1(c) S(v) = S(v)$, 因此 $S(v) = 0$ 。这证明了 $S(n, \chi_1) = 0$ 。故 (3) 当 χ 为原特征及 $(n, q) > 1$ 时仍成立。

(ii) 当 χ 为模 q 的原特征时, 在 (3) 式两边取绝对值, 并平方, 再对 n 求和, 可得

$$\begin{aligned}
 |\tau(\chi)|^2 \left(\sum_{1 \leq n \leq q} |\chi(\overline{n})|^2 \right) &= \sum_{1 \leq n \leq q} |S(n, \chi)|^2 \\
 &= \sum_{1 \leq a_1 \leq q} \sum_{1 \leq a_2 \leq q} \chi(a_1) \overline{\chi(a_2)} \left(\sum_{1 \leq n < q} e(n(a_1 - a_2)/q) \right).
 \end{aligned}$$

因为当 $|m| < q$ 时, 由等比级数求和, 可知

$$\sum_{1 \leq n \leq q} e\left(\frac{nm}{q}\right) = \begin{cases} q, & \text{若 } m = 0, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

所以

$$|\tau(\chi)|^2 \cdot \varphi(q) = \varphi(q) \cdot q, |\tau(\chi)| = \sqrt{q}.$$

当 χ 不为模 q 的原特征时, 设 $q = q_1^{\alpha_1} \cdots q_r^{\alpha_r}$ 为标准素因子分解式, 由定理 1.2.2 的(iv) 可知 $\chi = \chi_1 \cdots \chi_r$, χ_i 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的特征. 由(2) 式可得

$$|\tau(\chi)| = |\tau(\chi_1)| \cdots |\tau(\chi_r)|. \quad (4)$$

我们来证明

$$|\tau(\chi_i)| \leq q_i^{\alpha_i/2}. \quad (5)$$

若 χ_i 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的原特征, 由已证明的结论可得 $|\tau(\chi_i)| = q_i^{\alpha_i/2}$. 若 χ_i 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的主特征, 则

$$\begin{aligned}
 \tau(\chi_i) &= \sum_{\substack{1 \leq a \leq q_i^{\alpha_i} \\ q_i \nmid a}} e\left(\frac{a}{q_i^{\alpha_i}}\right) = \sum_{1 \leq a \leq q_i^{\alpha_i}} e\left(\frac{a}{q_i^{\alpha_i}}\right) - \sum_{1 \leq b \leq q_i^{\alpha_i-1}} e\left(\frac{b}{q_i^{\alpha_i-1}}\right) \\
 &= - \sum_{1 \leq b \leq q_i^{\alpha_i-1}} e\left(\frac{b}{q_i^{\alpha_i-1}}\right),
 \end{aligned}$$

所以

$$\tau(\chi_i) = \begin{cases} 1, & \alpha_i = 1, \\ 0, & \alpha_i \geq 2. \end{cases}$$

若 χ_i 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的非主、非原特征, 则 $\alpha_i \geq 2$. 设 χ_i 是模 $q_i^{\beta_i}$ 的原特征, $1 \leq \beta_i < \alpha_i$, 则因每个满足 $q_i \nmid a$ 及 $1 \leq a \leq q_i^{\alpha_i}$ 的 a 可唯一

地表示为 $m + nq_i^{\beta_i}, q_i \nmid m, 1 \leq m \leq q_i^{\beta_i}, 0 \leq n \leq q_i^{\alpha_i - \beta_i} - 1$, 我们有

$$\begin{aligned}\tau(\chi_i) &= \sum_{1 \leq m \leq q_i^{\beta_i}} \sum_{0 \leq n \leq q_i^{\alpha_i - \beta_i} - 1} \chi(m + nq_i^{\beta_i}) e\left(\frac{m + n \cdot q_i^{\beta_i}}{q_i^{\alpha_i}}\right) \\ &= \sum_{1 \leq m \leq q_i^{\beta_i}} \chi(m) e\left(\frac{m}{q_i^{\alpha_i}}\right) \left(\sum_{0 \leq n \leq q_i^{\alpha_i - \beta_i} - 1} e\left(\frac{n}{q_i^{\alpha_i - \beta_i}}\right) \right) = 0.\end{aligned}$$

因此 $|\tau(\chi_i)| \leq q_i^{\alpha_i/2}$ 总成立。由(4)可得, 当 χ 为模 q 的非原特征时, $|\tau(\chi)| \leq \sqrt{q}$ 。

(iii) 当 χ 为模 q 的主特征时, 设 $q = q_1^{\alpha_1} \cdots q_r^{\alpha_r}$ 为 q 的标准素因子分解式, 则由定理 1.2.2 的(iv) 可知 $\chi = \chi_1 \cdots \chi_r, \chi_i$ 为模 $q_i^{\alpha_i}$ 的主特征。由(2)可得

$$c_q(n) = S(n, \chi) = \prod_{1 \leq i \leq r} S(n, \chi_i) = \prod_{1 \leq i \leq r} c_{q_i^{\alpha_i}}(n), \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\text{而 } c_{q_i^{\alpha_i}}(n) &= S(n, \chi_i) = \sum_{1 \leq a \leq q_i^{\alpha_i}} \chi_i(a) e\left(\frac{an}{q_i^{\alpha_i}}\right) = \sum_{\substack{1 \leq a \leq q_i^{\alpha_i} \\ q_i \nmid a}} e\left(\frac{an}{q_i^{\alpha_i}}\right) \\ &= \sum_{1 \leq a \leq q_i^{\alpha_i}} e\left(\frac{an}{q_i^{\alpha_i}}\right) - \sum_{1 \leq b \leq q_i^{\alpha_i} - 1} e\left(\frac{bn}{q_i^{\alpha_i}}\right).\end{aligned}$$

所以, 若 $q_i^{\lambda} \mid n, q_i^{\lambda+1} \nmid n, \lambda \geq 0$, 则由等比级数求和, 当 $\lambda \geq \alpha_i$ 时, $S(n, \chi_i) = q_i^{\alpha_i} - q_i^{\alpha_i-1} = \varphi(q_i^{\alpha_i})$, 当 $\lambda = \alpha_i - 1$ 时, $S(n, \chi_i) = -q_i^{\alpha_i-1}$, 而当 $0 \leq \lambda < \alpha_i - 1$ 时, 则有 $S(n, \chi_i) = 0$ 。因此

$$c_{q_i^{\alpha_i}}(n) = \frac{\varphi(q_i^{\alpha_i})\mu(q_i^{\alpha_i}/(q_i^{\alpha_i}, n))}{\varphi(q_i^{\alpha_i}/(q_i^{\alpha_i}, n))}. \quad (6)$$

因为 $\mu(m/(m, n))$ 与 $\varphi(m/(m, n))$ 都是 m 的积性函数, 所以由(5)与(6)可得

$$c_q(n) = \frac{\varphi(q)\mu(q/(q, n))}{\varphi(q/(q, n))}.$$

证毕。

下面的这个结果是关于特征和估计的。

定理 1.2.4 设 $q \geq 3$, $\chi(n)$ 为模 q 的一个原特征, M 为任一正整数, 则

$$\left| \sum_{n \leq M} \chi(n) \right| < 2\sqrt{q} \log q.$$

证明: 由定理 1.2.3 的 (i) 与 (ii) 可知

$$\bar{\chi}(n) = \frac{1}{\tau(\chi)} \left(\sum_{1 \leq a \leq q} \chi(a) e\left(\frac{na}{q}\right) \right),$$

其中 $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$, $e(\xi) = e^{2\pi i \xi}$. 因此,

$$\sum_{n \leq M} \bar{\chi}(n) = \frac{1}{\tau(\chi)} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} \chi(a) \left(\sum_{n \leq M} e\left(\frac{na}{q}\right) \right). \quad (7)$$

由等比级数的求和可知

$$\sum_{1 \leq n \leq M} e\left(\frac{na}{q}\right) = \frac{e(a/q)(1 - e(Ma/q))}{1 - e(a/q)}. \quad (8)$$

因为

$$|1 - e\left(\frac{a}{q}\right)| = |e\left(-\frac{a}{2q}\right) - e\left(\frac{a}{2q}\right)| = 2 \left| \sin \frac{a\pi}{q} \right|,$$

而若 $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 则易证(通过求导)

$$\frac{2}{\pi} \theta \leq \sin \theta,$$

所以, 若在 (7) 两边取绝对值, 则由 (8) 可得(将求和分成 $a \leq \frac{q}{2}$

与 $a > \frac{q}{2}$ 两部分, 并应用 $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$)

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n \leq M} \bar{\chi}(n) \right| &\leq \frac{1}{\sqrt{q}} \sum_{1 \leq a \leq q-1} \frac{2}{2 \left| \sin(a\pi/q) \right|} \\ &\leq \sqrt{q} \left(\sum_{1 \leq a \leq q/2} \frac{1}{a} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

若 $\xi > 1$, 则

$$\sum_{1 \leq a \leq \xi} \frac{1}{a} \leq 1 + \int_1^{\xi} \frac{1}{u} du = 1 + \log \xi.$$

于是,由式(9)可知本定理成立。证毕。

练 习

(I) 应用定理 1.2.2 的(i) 与(iv) 证明,若 $q = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ 为 q 的标准素因子分解式, $\alpha \geq 3$, 则模 q 的任一个特征函数 $\chi(n)$ 形如

$$\chi(n) = \begin{cases} (-1)^{m_1 \alpha(n)} e\left(\frac{m_2 \beta(n)}{2^{\alpha-2}}\right) \prod_{1 \leq i \leq r} e\left(\frac{k_i v_i(n)}{\varphi(p_i^{\alpha_i})}\right), & \text{若 } (n, q) = 1, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

其中 $(m_1, m_2, k_1, \cdots, k_r)$ 为任一组满足

$$0 \leq m_1 \leq 1, 1 \leq m_2 \leq 2^{\alpha-2}, 1 \leq k_i \leq \varphi(p_i^{\alpha_i})$$

的整数, $\alpha(n)$ 及 $\beta(n)$ 为由引理 1.2.1 的(i) 中确定的函数, $v_i(n)$ 为 n 相对于模 $p_i^{\alpha_i}$ 的某个指定的原根 g_i 的指数。类似地, 考虑 $q = 2^\alpha p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, $\alpha = 0, 1, 2$ 时的特征函数的形式。

(II) 若 p 为奇素数, 证明模 p 具有唯一的实原特征。

§ 1.3 L 函数的函数方程

设 $a(n)$ 和 $\lambda(n)$ 为二个积性函数, $\lambda(n) > 0$, 而当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\lambda(n) \rightarrow \infty$, 并设无穷级数

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(\lambda(n))^s}$$

当 $\text{Res} = \sigma > \sigma_0 \geq 1$ 时绝对收敛。设 s 为任一复数, $\text{Res} = \sigma > \sigma_0$ 。

若 n 的标准素因子分解式为 $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$, 则

$$\frac{a(n)}{(\lambda(n))^s} = \prod_{i=1}^r \frac{a(p_i^{\alpha_i})}{(\lambda(p_i^{\alpha_i}))^s}.$$

因此,若设 X 与 Y 为充分大正数,则

$$F(s) - \prod_{p \leq X} \left(\sum_{0 \leq r \leq Y} \frac{a(p^r)}{(\lambda(p^r))^s} \right) = \sum_n' \frac{a(n)}{(\lambda(n))^s},$$

其中计数于 \sum_n' 中的每个 n , 或者它有素因子大于 X , 从而 $n > X$, 或者它的素因子都小于 X , 但至少有一个素因子 p 及一个整数 $\alpha, \alpha > Y$, 使得 $p^\alpha | n$, 从而 $n > 2^Y$ 。于是

$$\left| \sum_n' \frac{a(n)}{(\lambda(n))^s} \right| \leq \sum_{n > X} \frac{|a(n)|}{(\lambda(n))^\sigma} + \sum_{n > 2^Y} \frac{|a(n)|}{(\lambda(n))^\sigma}.$$

令 $Y \rightarrow \infty$, 得

$$F(s) - \prod_{p \leq X} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a(p^r)}{(\lambda(p^r))^s} \right) = O \left(\sum_{n > X} \frac{|a(n)|}{(\lambda(n))^\sigma} \right).$$

再令 $X \rightarrow \infty$, 则得

$$F(s) = \prod_{p \geq 2} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a(p^r)}{(\lambda(p^r))^s} \right).$$

我们注意到, 若对于每个素数 p , 当 $\sigma > \sigma_0$ 时 $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{|a(p^r)|}{(\lambda(p^r))^\sigma} < +\infty$, 并且极限

$$\prod_{p \geq 2} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{|a(p^r)|}{(\lambda(p^r))^\sigma} \right) = \lim_{X \rightarrow \infty} \prod_{p \leq X} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{|a(p^r)|}{(\lambda(p^r))^\sigma} \right)$$

存在, 则上面的讨论实际上已给出(注意: $\lambda(1) = a(1) = 1$)

$$\sum_{n \leq X} \frac{|a(n)|}{(\lambda(n))^\sigma} \leq \prod_{p \leq X} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{|a(p^r)|}{(\lambda(p^r))^\sigma} \right) \leq \prod_{p \geq 2} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{|a(p^r)|}{(\lambda(p^r))^\sigma} \right),$$

因此, 令 $X \rightarrow \infty$, 可知无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(n)}{(\lambda(n))^s}$ 当 $\text{Res} = \sigma > \sigma_0$ 时是绝对收敛的。于是, 我们有

引理 1.3.1 若 $a(n)$ 及 $\lambda(n)$ 为积性函数, $\lambda(n) > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(n) = 0$, 且当 $\sigma > \sigma_0 \geq 1$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(\lambda(n))^\sigma} < +\infty \text{ 或 } \prod_{p \geq 2} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{|a(p^r)|}{(\lambda(p^r))^\sigma} \right) < +\infty,$$

则当 $\operatorname{Re} s > \sigma_0$ 时,

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{(\lambda(n))^s} = \prod_{p \geq 2} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{a(p^r)}{(\lambda(p^r))^s} \right).$$

当 χ 为模 q 的任一特征, $q \geq 1$, $a(n) = \chi(n)$ 及 $\lambda(n) = n$ 时, 我们称 $F(s)$ 为 L 函数, 记为 $L(s, \chi)$ 。特别地, 若 $q = 1$, $\chi(n) = 1 (n \geq 1)$, 则称 $F(s)$ 为 ζ 函数, 记为 $\zeta(s)$ 。由于当 X 充分大且 $\sigma > 1$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} n^{-\sigma} &= 1 + \sum_{2 \leq n \leq X} n^{-\sigma} \leq 1 + \sum_{2 \leq n \leq X} \int_{n-1}^n u^{-\sigma} du \\ &\leq 1 + \int_1^X u^{-\sigma} du = \frac{\sigma}{\sigma-1} - \frac{X^{1-\sigma}}{\sigma-1} < \frac{\sigma}{\sigma-1}, \end{aligned}$$

所以 $L(s, \chi)$ 与 $\zeta(s)$ 当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时都绝对收敛, 且由引理 1.3.1 可得

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= \prod_p \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\chi(p^r)}{p^{rs}} \right) = \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right)^{-1}, \\ \zeta(s) &= \prod_p \left(\sum_{r=0}^{\infty} p^{-rs} \right) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

应用下面的引理 1.3.4, 不难验证 $L(s, \chi)$ 与 $\zeta(s)$ 都是开集 $\{s \mid \operatorname{Re} s > 1\}$ 上的解析函数。我们将证明当 $\chi \neq \chi_0$ 时, $L(s, \chi)$ 可解析开拓为全平面上的解析函数, 而 $\zeta(s)$ 则可解析开拓为全平面上除孤立奇点 $s = 1$ 外处处解析的函数, 且 $\zeta(s)$ 以 $s = 1$ 为一阶极点。

引理 1.3.2 设实函数 $g(\varphi)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, λ 为非零实数, 则

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b g(\varphi) \sin(\lambda \varphi) d\varphi = 0.$$

证明: 因为 g 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 所以 g 有界, 且在 $[a, b]$ 上绝对可积。设 $n > 1$, $[a, b]$ 的 n 等分为

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n < x_{n+1} = b, x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}.$$

又设 $\sup_{\varphi \in [x_i, x_{i+1}]} g(\varphi) = K_i, \inf_{\varphi \in [x_i, x_{i+1}]} g(\varphi) = k_i, 0 \leq i \leq n$. 则

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b g(\varphi) \sin(\lambda \varphi) d\varphi \right| &= \left| \sum_{0 \leq i \leq n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} g(\varphi) \sin(\lambda \varphi) d\varphi \right| \\ &\leq \sum_{0 \leq i \leq n} \left| \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g(\varphi) - k_i) \sin(\lambda \varphi) d\varphi + k_i \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sin(\lambda \varphi) d\varphi \right| \\ &\leq \sum_{0 \leq i \leq n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |g(\varphi) - k_i| d\varphi + \frac{2}{|\lambda|} \left(\sum_{0 \leq i \leq n} |k_i| \right) \\ &\leq \sum_{0 \leq i \leq n} (K_i - k_i) \left(\frac{b-a}{n} \right) + \frac{2}{|\lambda|} \left(\sum_{0 \leq i \leq n} |k_i| \right). \end{aligned} \quad (1)$$

因为 $g(\varphi)$ 在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积, 所以当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$$\sum_{0 \leq i \leq n} (K_i - k_i) \left(\frac{b-a}{n} \right) \rightarrow 0.$$

因此, 任给 $\varepsilon > 0$, 都存在 $N = N(\varepsilon)$, 使得 $n \geq N(\varepsilon)$ 时, (1) 式右

边第一个求和 $< \frac{\varepsilon}{2}$. 无妨取 $n = [N(\varepsilon)] + 1$. 当 n 取定时, 可知

存在 $\lambda(\varepsilon) > 0$, 当 $\lambda > \lambda(\varepsilon)$ 时, (1) 式右边第二个加项 $< \frac{\varepsilon}{2}$. 则

当 $\lambda > \lambda(\varepsilon)$ 时

$$\left| \int_a^b g(\varphi) \sin(\lambda \varphi) d\varphi \right| < \varepsilon,$$

所以按定义可知

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b g(\varphi) \sin(\lambda \varphi) d\varphi = 0.$$

证毕。

引理 1.3.3 设 x 与 α 为实数, $x > 0$, 则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+\alpha)^2 \pi/x} = \sqrt{x} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi x + 2\pi i n \alpha}. \quad (2)$$

证明: 显然, (2) 式两端的无穷级数都是绝对收敛的, 且 (2) 式两端都是 α 的周期为 1 的函数。因此, 为证此引理, 我们仅需考

虑 $0 \leq \alpha < 1$ 。事实上,我们只要就 $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$ 的情形证明(2)式,

因为若 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$,则 $0 < 1 - \alpha < \frac{1}{2}$,而我们看到

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+\alpha)^2 \pi/x} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(1-\alpha+n)^2 \pi/x} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi x + 2\pi i n \alpha} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi x - 2\pi i n \alpha} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-n^2 \pi x + 2\pi i n (1-\alpha)},\end{aligned}$$

所以由关于 $1 - \alpha$ 的(2)的相应等式可知此时(2)式对于 α 仍成立。设 $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ 。令

$$f(\alpha) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-(n+\alpha)^2 \pi/x}.$$

下面我们寻求 $f(\alpha)$ 的 Fourier 级数展开式。对于充分大的正整数 M ,考虑部分和

$$S_M(f, \alpha) = \sum_{|m| \leq M} a_m e(m\alpha),$$

这里 $a_m = \int_0^1 f(u) e(-um) du$,而对于实数 ξ , $e(\xi) = \exp(2\pi i \xi)$ 。

由等比级数求和,当 $0 \leq u \leq 1$ 且 $u \neq \alpha$ 时,

$$\begin{aligned}\sum_{|m| \leq M} e(m(\alpha - u)) &= \frac{e(-M(\alpha - u))(1 - e((\alpha - u)(2M + 1)))}{1 - e(\alpha - u)} \\ &= \frac{e\left(-\left(M + \frac{1}{2}\right)(\alpha - u)\right) - e\left(\left(M + \frac{1}{2}\right)(\alpha - u)\right)}{e\left(-\frac{1}{2}(\alpha - u)\right) - e\left(\frac{1}{2}(\alpha - u)\right)} \\ &= \frac{\sin(2\pi(M + \frac{1}{2})(\alpha - u))}{\sin(\pi(\alpha - u))}.\end{aligned}\quad (3)$$

因为 $\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{\sin \xi}{\xi} = 1$,我们可将 $\alpha = u$ 看成(3)的极限情况。这么一来,(3)就对所有的 $u \in [0, 1]$ 都成立了。我们由此得

$$S_M(f, \alpha) = \int_0^1 f(u) \cdot \frac{\sin\left[2\pi\left(M + \frac{1}{2}\right)(\alpha - u)\right]}{\sin[\pi(\alpha - u)]} du.$$

因为(设 n 为整数)

$$\int_0^1 e(-n\theta) d\theta = \begin{cases} 0, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0, \end{cases}$$

所以由(3)又有

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \sum_{|m| \leq M} \left(\int_0^1 f(\alpha) e(-mu) du \right) e(m\alpha) \\ &= \int_0^1 f(u) \cdot \frac{\sin\left[2\pi\left(M + \frac{1}{2}\right)(\alpha - u)\right]}{\sin[\pi(\alpha - u)]} du. \end{aligned}$$

因此得

$$\begin{aligned} S_M(f, \gamma) - f(\alpha) &= \int_0^1 (f(u) - f(\alpha)) \frac{\sin\left(2\pi\left(M + \frac{1}{2}\right)(\alpha - u)\right)}{\sin(\pi(\alpha - u))} du \\ &= \int_0^\alpha (f(\alpha) - f(\alpha - \varphi)) \cdot \frac{\sin\left(2\pi\left(M + \frac{1}{2}\right)\varphi\right)}{\sin(\pi\varphi)} d\varphi \\ &\quad + \int_0^{1-\alpha} (f(\alpha + \varphi) - f(\alpha)) \cdot \frac{\sin\left(2\pi\left(M + \frac{1}{2}\right)\varphi\right)}{\sin(\pi\varphi)} d\varphi. \quad (4) \end{aligned}$$

当 $0 < \varphi \leq \frac{1}{2}$ 时,我们令

$$\begin{aligned} g(\varphi) &= \frac{f(\alpha) - f(\alpha - \varphi)}{\sin(\pi\varphi)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(n+\alpha)^2\pi/x} - e^{-(n+\alpha-\varphi)^2\pi/x}}{\sin(\pi\varphi)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(\varphi). \end{aligned}$$

对每个整数 n , 令

$$g_n = \lim_{\xi \rightarrow 0+} g_n(\xi) = -\frac{n+\alpha}{x} e^{-(n+\alpha)^2\pi/x}, \quad g(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n.$$

则我们断言:函数 $g(\varphi)$ 在 $[0, \alpha]$ 上连续。为此,我们仅证明 $g(\varphi)$

在 $\varphi = 0$ 处连续, 因为可类似证明 $g(\varphi)$ 在其他点 $\varphi \in (0, \alpha]$ 处

也连续。级数 $g(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(\varphi)$ 在 $(0, \alpha]$ 上是绝对收敛的, 因为

$$\begin{aligned} |g_n(\varphi)| &= e^{-(n+\alpha)^2\pi/x} \frac{1}{\sin \pi\varphi} |e^{(-\varphi^2+2\varphi(n+\alpha))\pi/x} - 1| \\ &= \frac{e^{-(n+\alpha)^2\pi/x}}{\sin(\pi\varphi)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left| (\varphi^2 - 2\varphi(n+\alpha)) \frac{\pi}{x} \right|^k. \end{aligned}$$

所以, 由 $\sin(\pi\varphi) \geq 2\varphi$ (注意: $0 < \varphi \leq \alpha \leq \frac{1}{2}$) 可得

$$\begin{aligned} |g_n(\varphi)| &\leq \frac{1}{2} e^{-(n+\alpha)^2\pi/x} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left| (\alpha + 2|n+\alpha|) \frac{\pi}{x} \right|^k \\ &\leq \frac{1}{2} e^{(\alpha+2|n+\alpha| - |n+\alpha|^2)\pi/x}. \end{aligned}$$

故 $g(\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n(\varphi)$ 是绝对收敛的。因此, 任给 $\varepsilon > 0$, 存在 $N = N(\varepsilon) > 0$, 使得

$$\sum_{|n| > N} (|g_n(\varphi)| + |g_n|) < \frac{\varepsilon}{2}$$

对一切 $\varphi \in (0, \alpha]$ 成立。又由于 $\lim_{\xi \rightarrow 0+} g_n(\xi) = g_n$, 对每个整数 $n, |n| \leq N$, 必存在 $\delta_n > 0$, 使当 $0 < \varphi < \delta_n$ 时,

$$|g_n(\varphi) - g_n| < \frac{\varepsilon}{6N}.$$

故存在一个 $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使当 $0 < \varphi < \delta, |n| \leq N$ 时,

$$|g_n(\varphi) - g_n| < \frac{\varepsilon}{6N}$$

总成立。由此可得

$$\left| \sum_{|n| \leq N} g_n(\varphi) - \sum_{|n| \leq N} g_n \right| \leq \sum_{|n| \leq N} |g_n(\varphi) - g_n| < (2N+1) \cdot \frac{\varepsilon}{6N} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

所以, 当 $0 < \varphi < \delta$ 时,

$$|g(\varphi) - g(0)| \leq \left| \sum_{|n| \leq N} (g_n(\varphi) - g_n) \right|$$

$$+ \sum_{|n| > N} (|g_n(\varphi)| + |g_n|) < \varepsilon,$$

因此可知 $g(\varphi)$ 在 $\varphi = 0$ 处连续。类似可证 $g(\varphi)$ 在其他点 $\varphi \in [0, \alpha]$ 处连续, 故 $g(\varphi)$ 在 $[0, \alpha]$ 上连续。这样, 由引理 1.3.2 立即可知 (4) 式右边第一个积分当 $M \rightarrow \infty$ 时趋于零, 而同理可证 (4) 式右边第二个积分当 $M \rightarrow \infty$ 时也趋于零。由此我们得到

$$f(\alpha) = \lim_{M \rightarrow \infty} S_M(f, \alpha) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e(m\alpha). \quad (5)$$

我们有

$$\begin{aligned} a_m &= \int_0^1 f(u) e(-mu) du = \int_0^1 \left(\sum_{|n| \leq N} e^{-(n+u)^2 \pi/x} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{|n| > N} e^{-(n+u)^2 \pi/x} \right) e(-mu) du \\ &= \sum_{|n| \leq N} \int_0^1 e^{-(n+u)^2 \pi/x - 2\pi i m u} du + O\left(\sum_{|n| > N} \frac{x}{n^2 \pi}\right) \\ &= \sum_{|n| \leq N} \int_n^{n+1} e^{-\frac{u^2}{2} \pi/x - 2\pi i m u} du + O\left(\frac{x}{N}\right) \\ &= e^{-\pi m^2 x} \int_{-N}^{N+1} e^{-\frac{\pi}{2}(u+imx)^2} du + O\left(\frac{x}{N}\right). \end{aligned}$$

不妨设 $m > 0$ 。由残数定理我们有

$$\int_L e^{-\frac{\pi}{2} z^2} dz = 0,$$

这里 L 是由复 z 平面上端点为 $(N+1, 0), (N+1, mx), (-N, mx)$ 及 $(-N, 0)$ 的矩形所构成的积分路径。所以

$$\int_{-N}^{N+1} e^{-\frac{\pi}{2}(u+imx)^2} du = R_1 + R_2 + R_3,$$

这里 R_1, R_2 与 R_3 是分别沿着从 $(-N, mx)$ 至 $(-N, 0)$, 从 $(-N, 0)$ 到 $(N+1, 0)$, 和从 $(N+1, 0)$ 到 $(N+1, mx)$ 这三条边所取的积分。我们有

$$|R_1| = O\left(\left|\int_0^{mx} e^{-\frac{\pi}{x}(-N+it)^2} dt\right|\right) = O(e^{-\frac{\pi}{x}(N-mx)^2} mx),$$

$$R_2 = \int_{-N}^{N+1} e^{-\frac{\pi}{2}u^2} du,$$

$$R_3 = O\left(\left|\int_0^{mx} e^{-\frac{\pi}{x}(N+1+it)^2} dt\right|\right) = O(mx \cdot e^{-\frac{\pi}{x}(N+1-mx)^2}).$$

因此,令 $N \rightarrow \infty$ 可得

$$a_m = e^{-\pi m^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{x}u^2} du = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}} \cdot e^{-\pi m^2} \int_0^{\infty} e^{-v^2} dv. \quad (6)$$

任给 $\varepsilon > 0$. 我们有

$$\left(\int_0^{\infty} e^{-v^2} dv\right)^2 = \iint_{D(\varepsilon)} e^{-(u^2+v^2)} du dv + O(\varepsilon),$$

这里

$$D(\varepsilon) = \{(u, v) \mid u \geq 0, v \geq 0, u^2 + v^2 \geq \varepsilon^2\}.$$

作变量替换 $u = r \cos \theta, v = r \sin \theta, r \geq \varepsilon, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, 可知

$$\iint_{D(\varepsilon)} e^{-u^2-v^2} du dv = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_{\varepsilon}^{\infty} r e^{-r^2} dr \right) d\theta = \frac{\pi}{4} e^{-\varepsilon^2}.$$

因此,令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 可得

$$\int_0^{\infty} e^{-v^2} dv = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (7)$$

由(5) ~ (7), 可知引理 1.3.3 在 $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ 时成立. 接下去, 与前面证明函数 $g(\varphi)$ 连续类似地, 可知(2) 式左右两边的函数都在 $\alpha = 0$ 处连续. 因此, 由已证明的结果, 令 $\alpha \rightarrow 0^+$ 可知(2) 式在 $\alpha = 0$ 处也成立. 再由我们的说明就可知引理 1.3.3 对一切实数 α 都成立. 证毕。

引理 1.3.4 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha)$ 当 $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$ 时收敛, 每个函数 $F_n(\alpha)$ 在 $\alpha = \alpha_0$ 处可导, 且对任意的 $\delta_1, 0 < |\delta_1| < \delta$, 存在

与 n 无关的常数 C_1 及 C_2 , 使得

$$\begin{aligned} |F_n(\alpha_0 + \delta_1) - F_n(\alpha_0)| &\leq C_1 |\delta_1 f_n|, \\ |F'_n(\alpha_0)| &\leq C_2 |f_n|, \sum_{n \geq 1} |f_n| < \infty, \end{aligned}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha)$ 作为 α 的函数在 $\alpha = \alpha_0$ 处可导, 且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha) \right)' \Big|_{\alpha=\alpha_0} = \sum_{n=1}^{\infty} F'_n(\alpha_0).$$

(注意: $\alpha_0, \alpha, \delta_1, F_n(\alpha)$ 及 f_n 都允许取复值)。

证明: 令

$$F(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha).$$

任给 $\varepsilon > 0$, 设 $0 < |\Delta| < \delta$, 则

$$\begin{aligned} & \left| \frac{F(\alpha_0 + \Delta) - F(\alpha_0)}{\Delta} - \sum_{n=1}^{\infty} F'_n(\alpha_0) \right| \\ & \leq \sum_{n \leq N} \left| \frac{F_n(\alpha_0 + \Delta) - F_n(\alpha_0)}{\Delta} - F'_n(\alpha_0) \right| \\ & \quad + \sum_{n > N} \left| \frac{F_n(\alpha_0 + \Delta) - F_n(\alpha_0)}{\Delta} \right| + \sum_{n > N} |F'_n(\alpha_0)|. \end{aligned}$$

由假设条件可知

$$\left| \frac{F_n(\alpha_0 + \Delta) - F_n(\alpha_0)}{\Delta} \right| \leq C_1 |f_n|, |F'_n(\alpha_0)| \leq C_2 |f_n|.$$

因为 $\sum_{n \geq 1} |f_n| < \infty$, 故存在充分大的 $N_0(\varepsilon)$, 当 $N = N_0(\varepsilon)$ 时,

$$\sum_{n > N} \left(\left| \frac{F_n(\alpha_0 + \Delta) - F_n(\alpha_0)}{\Delta} \right| + |F'_n(\alpha_0)| \right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

对每个正整数 $n, n \leq N$, 因为 $F_n(\alpha)$ 在 $\alpha = \alpha_0$ 处可导, 由定义可知存在充分小正数 $\Delta_n, \Delta_n < \delta$, 当 $0 < |\Delta| < \Delta_n$ 时,

$$\left| \frac{F_n(\alpha_0 + \Delta) - F_n(\alpha_0)}{\Delta} - F'_n(\alpha_0) \right| < \frac{\varepsilon}{2N}.$$

因此,当 $0 < |\Delta| < \min_{n \leq N} \Delta_n = \delta_1(\varepsilon)$ 时,

$$\left| \sum_{n \leq N} \left| \frac{F_n(\alpha_0 + \Delta) - F_n(\alpha_0)}{\Delta} - F'_n(\alpha_0) \right| \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left| \frac{F(\alpha_0 + \Delta) - F(\alpha_0)}{\Delta} - \sum_{n \geq 1} F'_n(\alpha_0) \right| < \varepsilon.$$

这样,由定义就知道 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha)$ 在 $\alpha = \alpha_0$ 处可导,且

$$F'(\alpha_0) = \sum_{n=1}^{\infty} F'_n(\alpha_0).$$

证毕。

有了这些准备,我们可来建立 L 函数与 ζ 函数的函数方程。

定理 1.3.5 (i) $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ 。设 χ 为模 q 的原特征,若 $\chi(-1) = 1$, 则 $\delta = 0$, 若 $\chi(-1) = -1$, 则 $\delta = 1$ 。对于 $u \geq 1$, 令

$$F(u, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \chi(m) m^{\delta} e^{-\pi m^2 u / q}.$$

则

$$\xi(s, \chi) = \frac{i^{\delta} q^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \int_1^{\infty} u^{\frac{1}{2}(\delta-1-s)} F(u, \overline{\chi}) du + \int_1^{\infty} u^{\frac{1}{2}(\delta+s)-1} F(u, \chi) du$$

为一个整函数,并满足

$$\xi(s, \chi) i^{\delta} q^{\frac{1}{2}} = \tau(\chi) \xi(1-s, \overline{\chi}),$$

其中 $\tau(\chi)$ 为 Gauss 和。在 $\text{Re } s > 1$ 时定义 L 函数

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s},$$

则 $L(s, \chi)$ 可解析开拓成为整函数(解析开拓后的函数仍记为 $L(s, \chi)$), 解析开拓后的 $L(s, \chi)$ 以 $s = -\delta - 2n$ 为平凡的零点, n 为任意非负整数, 且满足

$$\xi(s, \chi) = \begin{cases} L(s, \chi)(q\pi^{-1})^{\frac{1}{2}(s+\delta)}\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right), \\ \text{若 } s \neq -\delta - 2n, n \text{ 为任意非负整数,} \\ \lim_{s \rightarrow \delta - 2n} (L(s, \chi)(q\pi^{-1})^{\frac{1}{2}(s+\delta)}\Gamma(\frac{1}{2}(s+\delta))), \\ \text{若 } s = -\delta - 2n, n \text{ 为某个非负整数。} \end{cases}$$

(ii) 令

$$\xi(s) = s(s-1) \left(\int_1^\infty \left(u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} + u^{\frac{s}{2}-1} \right) \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 u} \right) du \right) + 1,$$

则 $\xi(s)$ 为一个整函数, 满足

$$\xi(s) = \xi(1-s).$$

在 $\operatorname{Re} s > 1$ 时定义 ζ 函数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s},$$

则 $\zeta(s)$ 可解析开拓成为全平面上以 $s=1$ 为唯一极点、相应残数为 1 的亚纯函数(解析开拓后的函数仍记为 $\zeta(s)$), 它以 $-2n$ 为平凡的零点, n 为任意正整数, 并满足

$$\xi(s) = \begin{cases} 2(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right), \\ \text{若 } \frac{1}{2}s \text{ 不为负整数, } s \neq 1, \\ 2 \lim_{s \rightarrow -2n} ((s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma(\frac{1}{2}s+1)), \\ \text{若 } \frac{1}{2}s = -n, n \text{ 为正整数,} \\ 1, \quad \text{若 } s = 1. \end{cases}$$

证明: (i) 当 χ 为模 q 的原特征时, 由于 $(\chi(-1))^2 = \chi(1) = 1$, 所以 $\chi(-1) = 1$ 或 -1 。先考虑 $\chi(-1) = 1$ 的情形, 这时 $\delta = 0$ 。设 s 为复数, $\operatorname{Re} s = \sigma > 5$ 。由 § 1.1 我们有

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{s}{2}-1} dx.$$

对于每个正整数 n , 作变量替换 $x = n^2\pi y/q$, 可得

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \left(\frac{n^2\pi}{q}\right)^{\frac{s}{2}} \int_0^\infty y^{\frac{s}{2}-1} e^{-yn^2\pi/q} dy, \quad (8)$$

所以, 按定义有

$$\begin{aligned} (q\pi^{-1})^{\frac{s}{2}} n^{-s} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) &= \int_0^\infty y^{\frac{s}{2}-1} e^{-yn^2\pi/q} dy \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} a(\epsilon, n) + \lim_{M \rightarrow +\infty} b(M, n), \end{aligned}$$

这里

$$a(\epsilon, n) = \int_\epsilon^1 y^{\frac{s}{2}-1} e^{-yn^2\pi/q} dy, \quad b(M, n) = \int_1^M y^{\frac{s}{2}-1} e^{-yn^2\pi/q} dy.$$

因此, 设 N 为一个正整数, $0 < \epsilon < 1/N$, $M > N$, N 充分大, 使得当 $y \geq N$ 时

$$y^{\frac{\sigma}{2}-1} e^{-y\pi n^2/q} < e^{-y}.$$

则

$$\begin{aligned} a(\epsilon, n) &= \int_{\frac{1}{N}}^1 y^{\frac{s}{2}-1} e^{-yn^2\pi/q} dy + \int_\epsilon^{\frac{1}{N}} y^{\frac{s}{2}-1} y^{-y\pi n^2/q} dy \\ &= \int_{\frac{1}{N}}^1 y^{\frac{s}{2}-1} e^{-y\pi n^2/q} dy + O\left(\int_\epsilon^{\frac{1}{N}} y^{\frac{\sigma}{2}-1} dy\right) \\ &= \int_{\frac{1}{N}}^1 y^{\frac{s}{2}-1} e^{-y\pi n^2/q} dy + O(N^{-\frac{\sigma}{2}}), \\ b(M, n) &= \int_1^N y^{\frac{s}{2}-1} e^{-y\pi n^2/q} dy + \int_N^M y^{\frac{s}{2}-1} e^{-y\pi n^2/q} dy \\ &= \int_1^N y^{\frac{s}{2}-1} e^{-y\pi n^2/q} dy + O\left(\int_N^M e^{-y/q} dy\right) \\ &= \int_1^N y^{\frac{s}{2}-1} e^{-y\pi n^2/q} dy + O(e^{-N/q}). \end{aligned}$$

因此

$$(q\pi^{-1})^{\frac{s}{2}} n^{-s} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) = \int_{\frac{1}{N}}^1 y^{\frac{s}{2}-1} e^{-y\pi n^2/q} dy + \int_1^N y^{\frac{s}{2}-1} e^{-y\pi n^2/q} dy \\ + O(N^{-\frac{\sigma}{2}} + e^{-N}), \quad (9)$$

$$(q\pi^{-1})^{\frac{s}{2}} \left(\sum_{n=1}^N \chi(n) n^{-s} \right) \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) = \int_{\frac{1}{N}}^1 y^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^N \chi(n) e^{-y\pi n^2/q} \right) dy \\ + \int_1^N y^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^N \chi(n) e^{-y\pi n^2/q} \right) dy + O(N^{1-\frac{\sigma}{2}} + Ne^{-N}). \quad (10)$$

当 $y > 0$ 时, $e^{-y\pi n^2/q} < \frac{q}{n^2\pi y}$, 所以级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-y\pi n^2/q}$$

对于 $y \in [1/N, N]$ 是一致收敛的, 且因每个加项都为 $[1/N, N]$ 上 y 的连续函数, 这个收敛的级数就代表 $[1/N, N]$ 上的连续函数。由于

$$\sum_{n>N} e^{-y\pi n^2/q} \leq e^{-y\pi/q} \sum_{n>N} e^{-y\pi n^2/(2q)} \leq e^{-y\pi/q} \sum_{n \geq N} \frac{2q}{y\pi n^2} \\ = O(e^{-y\pi/q} \cdot \frac{q}{yN}), \quad (11)$$

所以由(10)可得

$$(q\pi^{-1})^{\frac{s}{2}} \left(\sum_{n=1}^N \chi(n) n^{-s} \right) \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) = \int_{\frac{1}{N}}^1 y^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-y\pi n^2/q} \right) dy \\ + \int_1^N y^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-y\pi n^2/q} \right) dy + O\left(\frac{1}{N}\right), \quad (12)$$

其中 O 常数与 q 及 σ 有关。由定理 1.2.3 的(i)可知

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\chi)} \sum_{a=1}^q \bar{\chi}(a) e\left(\frac{an}{q}\right),$$

所以, 当 $1/N \leq y \leq 1$ 时, 由引理 1.3.2 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-y\pi n^2/q} = \frac{1}{2\tau(\chi)} \sum_{a=1}^q \bar{\chi}(a) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-y\pi n^2/q + 2\pi i an/q}$$

$$= \frac{1}{2\tau(\chi)} \cdot \sqrt{\frac{q}{y}} \cdot \sum_{a=1}^q \bar{\chi}(a) \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-(m+a/q)^2 \pi q/y}. \quad (13)$$

因为每个整数 n 可以唯一地表示为 $n = a + mq, 1 \leq a \leq q, m$ 为整数, 因此由 $\chi(\cdot)$ 的周期性可知

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-y\pi n^2/q} &= \frac{1}{2\tau(\chi)} \cdot \sqrt{\frac{q}{y}} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\chi}(n) e^{-\pi n^2 q/y}, \\ \int_{\frac{1}{N}}^1 y^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-y\pi n^2/q} \right) dy &= \frac{\sqrt{q}}{2\tau(\chi)} \int_{\frac{1}{N}}^1 y^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\chi}(n) e^{-\pi n^2 q/y} \right) dy \\ &= \frac{\sqrt{q}}{2\tau(\chi)} \int_1^N u^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\chi}(n) e^{-\pi n^2/q} \right) du. \end{aligned} \quad (14)$$

由(10)及(14)我们得

$$\begin{aligned} (q\pi^{-1})^{\frac{s}{2}} \left(\sum_{n=1}^N \chi(n) n^{-s} \right) \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) \\ = \frac{\sqrt{q}}{2\tau(\chi)} \int_1^N u^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\chi}(n) e^{-\pi n^2/q} \right) du \\ + \int_1^N y^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-y\pi n^2/q} \right) dy + O\left(\frac{1}{N}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

当 $y \geq 1$ 时, 与(11)类似地有估计

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-y\pi n^2/q} = O(qe^{-\pi y/q}). \quad (16)$$

设 $M' > M' > 0, M'$ 充分地大, 使得当 $y \geq M'$ 时, $e^{\pi y/2q} > y^{\frac{q}{2}-1}$. 则

$$\begin{aligned} \left| \int_{M'}^{M''} y^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-y\pi n^2/q} \right) dy \right| \\ = O\left(\int_{M'}^{M''} q e^{\pi y/2q} dy \right) = O(q^2 e^{-\pi M'/2q}). \end{aligned}$$

由此及定义, 可知当 $N \rightarrow \infty$ 时(15)右端第二个积分的极限存在. 类似地可知(15)右端第一项中的积分在 $N \rightarrow \infty$ 时极限也存在. 在(15)中令 $N \rightarrow \infty$, 当 $\text{Res} > 5$ 时就得到(利用 $\chi(-1) = 1$)

$$L(s, \chi)(q\pi^{-1})^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{\sqrt{q}}{\tau(\chi)} \int_1^{\infty} u^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} F(u, \bar{\chi}) du$$

$$+ \int_1^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1} F(u, \chi) du, \quad (17)$$

这里

$$F(u, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-\pi u n^2 / q}.$$

由(16)可知当 $u \geq 1$ 时

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-u \pi n^2 / q} = O(q e^{-\pi u / q}),$$

并且若 σ 是任意实数, u 充分大, 则有

$$u^{-\frac{1}{2} + \frac{|\sigma|}{2}} \leq e^{\pi u / (2q)},$$

所以由引理 1.1.1 的(ii) 可知函数

$$\xi(s, \chi) = \frac{\sqrt{q}}{\tau(\chi)} \int_1^{\infty} u^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} F(u, \overline{\chi}) du + \int_1^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1} F(u, \chi) du \quad (18)$$

是一个整函数。由定理 1.1.5 的(i) 及(ii) 可知: $\Gamma(s)$ 在全复平面上除去极点 $s = 0, -1, -2, \dots$ 外处处解析, 且 $\Gamma(s)$ 处处不为零。
令

$$g(s) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(s)}, & \text{若 } s \text{ 不为非负整数,} \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

我们要说明: $g(s)$ 是一个整函数。显然, 若 z 不为非负整数, 则 $g(s)$ 在 $s = z$ 处可导。若 z 为非负整数, 设 $z = -m, m \geq 0$ 。当 $0 < |s + m| < \frac{1}{2}$ 时, $s \neq -m$ 且 $0 \leq |\operatorname{Re} s + m| < \frac{1}{2}$ 。由定理 1.1.5 的(i)、(ii) 及(iii) 可得

$$g(s) = \frac{s(s+1)(s+2)\cdots(s+m)}{\Gamma(s+m+1)}.$$

因此根据定义可验证 $g(s)$ 在 $s = -m$ 处也可导。所以 $g(s)$ 是一个整函数。对所有的复数 s , 我们定义一个整函数 $\lambda(s, \chi)$ 为

$$\lambda(s, \chi) = \xi(s, \chi) g\left(\frac{1}{2}s\right) (q\pi^{-1})^{-\frac{s}{2}}.$$

由(17)及(18)可知当 $\text{Res} > 5$ 时, $\lambda(s, \chi) = L(s, \chi)$ 。因此 $\lambda(s, \chi)$ 可视为 $L(s, \chi)$ 在全平面上的解拓开拓。由解析函数的性质可知, $L(s, \chi)$ 在全 s 平面上的解析开拓是唯一的。对于非负整数 m , 由 $g(-m) = 0$ 可知 $\lambda(-2m, \chi) = 0$, 故解析开拓后的 $L(s, \chi)$ 以 $0, -2, -4, \dots$ 为零点。通常仍将 $\lambda(s, \chi)$ 记为 $L(s, \chi)$ 。若在(18)中以 $1-s$ 代 s , 并以 $\bar{\chi}$ 代 χ , 则得到

$$\begin{aligned} \xi(1-s, \bar{\chi}) &= \frac{\sqrt{q}}{\tau(\chi)} \int_1^\infty u^{-1+\frac{s}{2}} F(u, \chi) du \\ &\quad + \int_1^\infty u^{-\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} F(u, \bar{\chi}) du. \end{aligned} \quad (19)$$

由定理 1.2.3 的(ii)可知 $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$, 所以 $\tau(\chi) \overline{\tau(\chi)} = q$, 而因为 $\chi(-1) = 1$, 所以

$$\overline{\tau(\chi)} = \sum_{a=1}^q \bar{\chi}(a) e\left(-\frac{a}{q}\right) = \sum_{a=1}^q \bar{\chi}(-a) e\left(-\frac{a}{q}\right) = \tau(\bar{\chi}),$$

由此可得 $\frac{\sqrt{q}}{\tau(\chi)} = \frac{\tau(\bar{\chi})}{\sqrt{q}}$ 。因此, 由(18)与(19)我们得

$$\xi(s, \chi) = \frac{\tau(\bar{\chi})}{\sqrt{q}} \xi(1-s, \bar{\chi}). \quad (20)$$

此即 L 函数的函数方程, 其中 χ 是模 q 的满足 $\chi(-1) = 1$ 的原特征。以下设 χ 是模 q 的满足 $\chi(-1) = -1$ 的原特征。由(8)可得, 当 $\text{Res} > 5$ 时,

$$(q\pi^{-1})^{\frac{s}{2}} n^{1-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_0^\infty y^{\frac{s}{2}-1} n e^{-yn^2\pi/q} dy.$$

由此出发, 应用不等式 $n \leq \frac{2q}{y\pi} e^{y\pi n/2q}$ 及若干熟知的估计, 对任一充分大整数 N , 可与(12)类似地得到

$$\left(\sum_{n=1}^N \chi(n) n^{1-s}\right) (q\pi^{-1})^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) = \int_{\frac{1}{N}}^1 y^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^\infty n \chi(n) e^{-yn^2\pi/q}\right) dy$$

$$+ \int_1^N y^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \chi(n) e^{-y n^2 \pi / q} \right) dy + O(N^{-1/2}) \quad (21)$$

接下去,应用

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \chi(n) e^{-y n^2 \pi / q} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n \chi(n) e^{-y n^2 \pi / q},$$

与(13)类似地,对于 $1/N \leq y \leq 1$ 可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \chi(n) e^{-y n^2 \pi / q} = \frac{1}{2\tau(\chi)} \sum_{a=1}^q \bar{\chi}(a) \sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{-y n^2 \pi / q + 2\pi i a n / q}. \quad (22)$$

在引理 1.3.3 中,设 $-2 < \alpha < 2$, $x = y/q$ 。由

$$(e^{-(n+\alpha)^2 \pi / x})'_\alpha = -\frac{2\pi}{x} (n+\alpha) e^{-(n+\alpha)^2 \pi / x},$$

$$(e^{-n^2 \pi x + 2\pi i n a})'_\alpha = 2\pi i n e^{-n^2 \pi x + 2\pi i n a},$$

我们可应用引理 1.3.4, 分别对(2)式左边和右边的 α 的函数逐项求导, 然后令 $\alpha = \alpha_0 = a/q$, 就得到

$$ix^{-3/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+\alpha) e^{-(n+\alpha)^2 \pi / x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n e^{-n^2 \pi x + 2\pi i n a}.$$

由此可知当 a 固定时(22)式右端对 n 的求和为

$$i \left(\frac{y}{q} \right)^{-3/2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+a/q) e^{-(n+a/q)^2 q \pi / y}.$$

因为每个整数 m 可唯一地表示为 $m = nq + a$, $1 \leq a \leq q$, n 为整数, 所以, 当 $1/N \leq y \leq 1$ 时, 由(22)得到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n \chi(n) e^{-y n^2 \pi / q} &= \left(\frac{q}{y} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{i}{2\tau(\chi)} \sum_{a=1}^q \bar{\chi}(a) \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n+a/q) e^{-(n+a/q)^2 \pi q / y} \\ &= q^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{i}{2\tau(\chi)} \cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} m \bar{\chi}(m) e^{-m^2 \pi x / q y} \\ &= i \frac{q^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}}}{\tau(\chi)} \sum_{m=1}^{\infty} m \cdot \bar{\chi}(m) e^{-m^2 \pi x / q y}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 & \int_{\frac{1}{N}}^1 y^{s/2-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \chi(n) e^{-y \pi n^2/q} \right) dy \\
 &= \frac{iq^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \int_1^N u^{1/2-s/2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} m \bar{\chi}(m) e^{-m^2 \pi u/q} \right) du. \quad (23)
 \end{aligned}$$

由(21)及(23)可得

$$\begin{aligned}
 \left(\sum_{n=1}^N \chi(n) n^{1-s} \right) (q\pi^{-1})^{s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \frac{iq^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \int_1^N u^{1/2-s/2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} m \bar{\chi}(m) e^{-m^2 \pi u/q} \right) du \\
 &+ \int_1^N y^{s/2-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \chi(n) e^{-y \pi n^2/q} \right) dy + O(N^{-1/2}). \quad (24)
 \end{aligned}$$

可与证明(15)式右端的两个积分当 $N \rightarrow \infty$ 时收敛类似地,证明(24)式右端的两个积分在 $N \rightarrow \infty$ 时也收敛。因此,在(24)中令 $N \rightarrow \infty$, 得

$$\begin{aligned}
 L(s-1, \chi) (q\pi^{-1})^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) &= \frac{iq^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \int_1^{\infty} u^{\frac{1}{2}-\frac{s}{2}} G(u, \bar{\chi}) du \\
 &+ \int_1^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1} G(u, \chi) du, \quad (25)
 \end{aligned}$$

其中 $\text{Res} > 5$,

$$G(u, \chi) = \sum_{m=1}^{\infty} m \chi(m) e^{-m^2 \pi u/q}.$$

当 $\text{Res} > 5$ 时,将(25)中的 s 换成 $s+1$,可得

$$\begin{aligned}
 L(s, \chi) (q\pi^{-1})^{\frac{1}{2}(s+1)} \Gamma\left(\frac{1}{2}(s+1)\right) &= \frac{iq^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \int_1^{\infty} u^{-\frac{s}{2}} G(u, \bar{\chi}) du \\
 &+ \int_1^{\infty} u^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} G(u, \chi) du. \quad (26)
 \end{aligned}$$

可与证明由(18)定义的函数 $\xi(s, \chi)$ 是整函数类似地,应用引理 1.1.1 的(ii)证明,对任意复数 s 定义的函数

$$\tilde{\xi}(s, \chi) = \frac{iq^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \int_1^{\infty} u^{-\frac{s}{2}} G(u, \bar{\chi}) du$$

$$+ \int_1^{\infty} u^{\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} G(u, \chi) du \quad (27)$$

是一个整函数。再用我们已经定义过的整函数 $g(s)$, 定义

$$\tilde{\lambda}(s, \chi) = \tilde{\xi}(s, \chi) g\left(\frac{1}{2}(s+1)\right) (q\pi^{-1})^{-\frac{1}{2}(s+1)},$$

则 $\tilde{\lambda}(s, \chi)$ 为一个整函数, 且对于正整数 m , $\tilde{\lambda}(1-2m, \chi) = 0$ 。由 (26) 及 (27) 可知, 当 $\operatorname{Re} s > 5$ 时 $\tilde{\lambda}(s, \chi) = L(s, \chi)$, 因此, 我们就在 $\chi(-1) = -1$ 时, 也将 $L(s, \chi)$ 解析开拓到了全复 s 平面。若仍记 $\tilde{\lambda}(s, \chi)$ 为 $L(s, \chi)$, 则解析开拓后的 $L(s, \chi)$ 对任何正整数 m 满足 $L(1-2m, \chi) = 0$ 。由

$$\overline{\tau(\chi)} = \sum_{a=1}^q \overline{\chi(a)} e\left(-\frac{a}{q}\right) = - \sum_{a=1}^q \overline{\chi(-a)} e\left(-\frac{a}{q}\right) = -\tau(\overline{\chi}),$$

以及 $q = |\tau(\chi)|^2 = \tau(\chi) \overline{\tau(\chi)}$ (见定理 1.2.3 的(ii)), 我们有函数方程

$$\tilde{\xi}(1-s, \overline{\chi}) = \frac{iq^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \tilde{\xi}(s, \chi). \quad (28)$$

为将 (20) 与 (28) 写成统一的形式, 令

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{若 } \chi(-1) = 1, \\ 1, & \text{若 } \chi(-1) = -1, \end{cases}$$

以及

$$\begin{aligned} \xi(s, \chi) &= \frac{i^{\delta} q^{\frac{1}{2}}}{\tau(\chi)} \int_1^{\infty} u^{\frac{1}{2}(\delta-1-s)} F(u, \overline{\chi}) du \\ &\quad + \int_1^{\infty} u^{\frac{1}{2}(\delta+s)-1} F(u, \chi) du, \end{aligned}$$

这里 $F(u, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{\delta} e^{-\pi u n^2/q}$ 。则

$$\xi(s, \chi) = \begin{cases} L(s, \chi)(q\pi^{-1})^{\frac{1}{2}(s+\delta)}\Gamma(\frac{1}{2}(s+\delta)), \\ \quad \text{若 } s \neq -\delta - 2n, n \text{ 为任意非负整数,} \\ \lim_{s \rightarrow -\delta - 2n} \left(L(s, \chi)\Gamma(\frac{1}{2}(s+\delta))(q\pi^{-1})^{\frac{1}{2}(s+\delta)} \right), \\ \quad \text{若 } s = -\delta - 2n, n \text{ 为某个非负整数,} \end{cases}$$

$$i^{\delta}\xi(s, \chi) = \frac{\tau(\chi)}{\sqrt{q}}\xi(1-s, \bar{\chi}),$$

其中 $L(s, \chi)$ 已被解析开拓到了全平面, 且以 $-\delta - 2n$ 为零点, n 为任意非负整数。

(ii) 对于 $\zeta(s)$, 当 $\text{Res} > 5$ 时, 从 $q = 1$ 时的(8)式出发, 对任意正整数 N 可与(12)式类似地得

$$\left(\sum_{n=1}^N n^{-s} \right) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_{\frac{1}{N}}^1 y^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi y n^2} \right) dy \\ + \int_1^N y^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi y n^2} \right) dy.$$

在引理 1.3.3 中取 $\alpha = 0, x = y^{-1}$, 得

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi y n^2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi y n^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left(y^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 / y} - 1 \right),$$

所以

$$\int_{\frac{1}{N}}^1 y^{\frac{s}{2}-1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi y n^2} \right) dy = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{N}}^1 y^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 / y} \right) dy - \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{N}}^1 y^{\frac{s}{2}-1} dy \\ = \int_{\frac{1}{N}}^1 y^{\frac{s}{2}-\frac{3}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 / y} \right) dy + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s} + O(N^{\frac{3}{2}-\frac{s}{2}}) \\ = \int_1^N u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 u} \right) du + \frac{1}{s(s-1)} + O(N^{-1}), \\ \left(\sum_{n=1}^N n^{-s} \right) \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \int_1^N u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}} F(u) du + \int_1^N u^{\frac{s}{2}-1} F(u) du \\ + \frac{1}{s(s-1)} + O(N^{-1}),$$

这里 $F(u) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi un^2}$ 。接下去, 令 $N \rightarrow \infty$, 并应用 $\frac{s}{2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)$, 可与(17)类似地得

$$\begin{aligned} & 2(s-1)\zeta(s)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right) \\ &= s(s-1)\left(\int_1^{\infty} u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}F(u)du + \int_1^{\infty} u^{\frac{s}{2}-1}F(u)du\right) + 1. \quad (29) \end{aligned}$$

虽然这是在 $\text{Res} > 5$ 时得到的, 但是由与函数 $L(s, \chi)$ 的 $\chi(-1) = 1$ 的情形类似地可知(29)右端表示 s 的整函数, 我们记为 $\xi(s)$ 。则

$$2(s-1)\zeta(s)\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{1}{2}s+1\right) = \xi(s), \quad \xi(0) = \xi(1) = 1, \quad (30)$$

且若令 $g_1(s) = g\left(\frac{s}{2} + 1\right)$ (关于 $g(z)$, 见(i)的证明), 并定义

$$\lambda(s) = \frac{1}{2}\xi(s)g_1(s)\pi^{\frac{s}{2}}(s-1)^{-1},$$

则易知 $\lambda(s)$ 为一个全平面上的半纯函数, 具有唯一极点 $s = 1$ 。由(30)可知当 $\text{Res} > 5$ 时 $\lambda(s) = \zeta(s)$, 因此 $\lambda(s)$ 是 $\zeta(s)$ 的解析开拓。我们通常仍将 $\lambda(s)$ 记为 $\zeta(s)$ 。因此, 解析开拓后的 $\zeta(s)$ 仅以 $s = 1$ 为极点, 相应的残数为(由(7), 并在相应的 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ 的积分表达式中作变量替换 $t = s^2$)

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\zeta(s) &= \lim_{s \rightarrow 1} (s-1)\lambda(s) = \frac{1}{2}\xi(1)g_1(1)\pi^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^{-1}\pi^{\frac{1}{2}} = \pi^{\frac{1}{2}}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{-1} = 1. \end{aligned}$$

并且, 由 g_1 及 g 的定义我们还有

$$\zeta(0) = \lambda(0) = -\frac{1}{2}\xi(0)g_1(0) = -\frac{1}{2},$$

$$\zeta(-2m) = -\frac{1}{2}\xi(-2m)g_1(-2m)\pi^{-m}(1+2m)^{-1} = 0,$$

其中 $m \geq 1$, m 为整数。若在 $\xi(s)$ 的表达式中以 $1-s$ 代 s , 则我

们发现 $\xi(s) = \xi(1-s)$ 。这即 $\zeta(s)$ 的函数方程。并且, 我们有

$$\xi(s) = \begin{cases} 2(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma(\frac{1}{2}s+1), \\ \quad \text{若 } \frac{1}{2}s \text{ 不为负整数, } s \neq 1, \\ 2 \lim_{s \rightarrow -2n} (s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)\Gamma(\frac{1}{2}s+1), \\ \quad \text{若 } \frac{1}{2}s \text{ 为负整数 } -n, \\ 1, \quad \text{若 } s = 1. \end{cases}$$

证毕。

利用 L 函数和 ζ 函数的函数方程, 我们给出它们当 $0 \leq \text{Res} = \sigma \leq 1$ 时的估阶, 这是运用残数定理研究某些数论函数求和的基础。我们有

定理 1.3.6 (i) 若 χ 为模 q 原特征, $s = \sigma + it, 0 \leq \sigma \leq 1$, 则

$$L(s, \chi) = O((q(|t| + 2))^{(1-\sigma)/2} \log(q(|t| + 2))),$$

而若 $\sigma \geq 1$, 则 $L(s, \chi) = O(\log(q|s|))$ 。

(ii) 若 $s = \sigma + it, 0 \leq \sigma \leq 1, s \neq 1$, 则

$$\zeta(s)(s-1) = O((|t| + 2)^{(3-\sigma)/2} \log(|t| + 2)).$$

当 $\sigma \geq 1, |t| \geq 1$ 时,

$$\zeta(s) = O(\log(|t| + 2)).$$

当 $x \geq 3$ 时,

$$\zeta\left(1 + \frac{1}{\log x}\right) = O(\log x).$$

证明: (i) 证明分二步。先给出 L 函数粗糙一些的估阶, 然后在此基础上适当运用解析函数的最大模原理。

(a) 初步的阶估计。设 $N > M > 2, 0 \leq \text{Res} \leq 1$ 。由推论 1.1.4, 我们有

$$\sum_{M < n \leq N} \frac{\chi(n)}{n^s} = s \int_M^N \left(\sum_{M < n \leq t} \chi(n) \right) t^{-s-1} dt + \left(\sum_{M < n \leq N} \chi(n) \right) N^{-s}.$$

先设 $\operatorname{Re} s \geq 3/2$ 。则得

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= \sum_{n \leq M} \frac{\chi(n)}{n^s} + \sum_{n > N} \frac{\chi(n)}{n^s} + s \int_M^N \left(\sum_{M < n \leq t} \chi(n) \right) t^{-s-1} dt \\ &\quad + \left(\sum_{M < n \leq N} \chi(n) \right) N^{-s}. \end{aligned} \quad (31)$$

由定理 1.2.4 可知

$$\sum_{M < n \leq t} \chi(n) = O(q^{1/2} \log(2q)). \quad (32)$$

因此,若在(31)中令 $N \rightarrow \infty$,则得(用定义验证积分收敛)

$$L(s, \chi) = \sum_{n \leq M} \frac{\chi(n)}{n^s} + s \int_M^\infty \left(\sum_{M < n \leq t} \chi(n) \right) t^{-s-1} dt. \quad (33)$$

利用估计(32)及引理 1.1.1 的(i)的类似证法,可知(33)中的积分表示复 s 平面中半平面 $\operatorname{Re} s > 0$ 上的解析函数。于是,利用(33),我们已给出 $L(s, \chi)$ 由 $\operatorname{Re} s > 1$ 到 $\operatorname{Re} s > 0$ 上的解析开拓。并且,若再令 $M \rightarrow \infty$,则当 $\operatorname{Re} s > 0$ 时还有

$$L(s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}.$$

当 $s = \sigma + it, \sigma \in [1/2, 1]$ 时,令 $M = q^{1/2}(|t| + 2)$,由(32)和(33)我们有

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= O\left(\sum_{n \leq M} n^{-\sigma}\right) + O\left(|s| q^{1/2} \log q \left(\int_M^\infty t^{-\sigma-1} dt\right)\right) \\ &= O\left(M^{1-\sigma} \left(\sum_{n \leq M} n^{-1}\right)\right) + O(|s| q^{1/2} (\log q) \cdot M^{-\sigma}) \\ &= O((q^{1/2}(|t| + 2))^{1-\sigma} \log(q(|t| + 2))); \end{aligned} \quad (34)$$

其中用到

$$\sum_{n \leq M} n^{-1} \leq 1 + \int_1^M \frac{1}{t} dt = \log M + 1.$$

当 $s = \sigma + it, 0 \leq \sigma \leq 1/2$ 时,令

$$F(s) = \Gamma\left(\frac{\delta + 1 - s}{2}\right) g\left(\frac{\delta + s}{2}\right),$$

这里

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{若 } \chi(-1) = 1, \\ 1, & \text{若 } \chi(-1) = -1, \end{cases}$$

$$g(s) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(s)}, & \text{若 } s \text{ 不为 } 0 \text{ 或负整数,} \\ 0, & \text{否则.} \end{cases}$$

在定理 1.3.5 的(i)的证明过程中,我们已证明 $g(s)$ 为整函数。由定理 1.1.5 的(iv)可知,存在一个绝对常数 $t_0 > 1$,使得当 $|t| \geq t_0$ 时 $F(s) \ll |t|^{1/2-\sigma}$,而当 $|t| \leq t_0$ 时,因为在闭区域

$$\left\{s = \sigma + it \mid 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}, |t| \leq t_0\right\}$$

中 $F(s)$ 连续,所以 $F(s)$ 有界,即存在常数 $C_1 > 0$,使得 $|F(s)| \leq C_1$ 。这样,就有个绝对常数 $C > 0$,使得当 $0 \leq \sigma \leq 1/2$ 时,

$$|F(s)| \leq C(|t| + 2)^{1/2-\sigma}. \quad (35)$$

由定理 1.3.5 的(i)可知,当 $0 \leq \sigma \leq 1/2$ 且 $(s, \sigma) \neq (0, 0)$ 时,

$$L(s, \chi) = O(q^{1/2-\sigma} |F(s)| |L(1-s, \bar{\chi})|).$$

因此,由(34)及(35)可得

$$L(s, \chi) = O(q^{1/2(1-\sigma)} (|t| + 2)^{1/2 \log(q(|t| + 2))}). \quad (36)$$

由定理 1.3.5 的(i)可知,若 $\delta = 0, s = 0$,则 $L(0, \chi) = 0$,因此(36)对 $0 \leq \sigma \leq 1/2$ 总成立。由(34)和(36)可得

$$L(s, \chi) = O(q^{\frac{1}{2}(1-\sigma)} (|t| + 2)^{\min(1-\sigma, \frac{1}{2}) \log(q(|t| + 2))}), \quad (37)$$

其中 $s = \sigma + it, 0 \leq \sigma \leq 1$ 。

(b) 最大模原理的应用。当 $s = \sigma + it, 0 \leq \sigma \leq 1$ 时,令

$$f(s) = L(s, \chi) q^{-(1-s)/2} (i(s-2))^{-(1-s)/2} (\log(q(s+2)))^{-1}.$$

显然, $f(s)$ 为连通开集 $\{s \mid -1/2 < \operatorname{Re} s < 3/2\}$ 上的解析函数。当 $\sigma \in [0, 1]$ 及 $t \geq 0$ 时, 由于

$$(i(s-2))^{-(1-s)/2} = \exp[-1/2(1-\sigma-it)(\log|s-2| + i\theta)] = \exp[(-(1-\sigma)\log|s-2| - t\theta + i\varphi)/2],$$

其中 φ 为一实数, 而 θ 是由

$$\cos \theta + i \sin \theta = \frac{-t + i(\sigma-2)}{\sqrt{t^2 + (\sigma-2)^2}}.$$

确定的, $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 。利用 $\xi \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时总成立的不等式 $\sin \xi \geq \pi\xi/2$ (可用求导证明), 可知

$$t(-\theta) \leq t \sin(-\theta) = \frac{(2-\sigma)t}{\sqrt{t^2 + (\sigma-2)^2}} \leq 1,$$

于是

$$|(i(s-2))^{-(1-s)/2}| \leq (t+2)^{(\sigma-1)/2}.$$

因而再由(37)可得

$$|f(\sigma + it)| \leq (t+2)^{\min((1-\sigma)/2, \sigma/2)}. \quad (38)$$

对任意小的正数 ϵ , 令

$$h(s) = f(s)e^{i\epsilon s}.$$

显然, 由(38)可知, 存在一个正的绝对常数 C_2 , 使得当 $0 \leq \sigma \leq 1$ 和 $t \geq 0$ 时

$$|h(it)| \leq C_2, |h(1+it)| \leq C_2, |h(\sigma)| \leq C_2.$$

又由(38)可知必存在 $T_0(\epsilon) > 0$, 使得当 $0 \leq \sigma \leq 1$ 及 $t \geq T_0(\epsilon)$ 时,

$$|h(\sigma + it)| = |f(\sigma + it)|e^{-\epsilon t} \leq C_2.$$

由于 $|h(s)| \leq C_2$ 当 s 位于矩形 $\{s \mid s = \sigma + it, 0 \leq \sigma \leq 1, 0 \leq t \leq T_0(\epsilon)\}$ 的边界上时成立, 故由最大模原理可知 $|h(s)| \leq C_2$ 当 s 位于此矩形边界及内部时都成立。于是, $|h(s)| \leq C_2$ 当 $(s = \sigma + it) 0 \leq \sigma \leq 1$ 及 $t \geq 0$ 时都成立, 即此时

$$|f(\sigma + it)| \leq C_2 e^{-\varepsilon t}.$$

由此, 我们可对固定的 t 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则可得 $|f(s)| \leq C_2$ 。由此可得 (i) 的估计。在 $t < 0$ 时可类似证出。

(ii) 我们用估计 $L(s, \chi)$ 类似的方法来估计 $\zeta(s)$ 。设 $N > M \geq 2$, 且 M 及 N 为整数。由推论 1.1.4 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{M < n \leq N} n^{-s} &= s \int_M^N \left(\sum_{M < n \leq x} 1 \right) x^{-s-1} dx + \left(\sum_{M < n \leq N} 1 \right) N^{-s} \\ &= s \int_M^N ([x] - M) x^{-s-1} dx + (N - M) N^{-s} \\ &= -s \int_M^N \psi(x) x^{-s-1} dx + s \int_M^N (x - 1/2 - M) x^{-s-1} dx \\ &\quad + (N - M) N^{-s} \\ &= -s \int_M^N \psi(x) x^{-s-1} dx + \frac{s}{1-s} (N^{1-s} - M^{1-s}) \\ &\quad + (1/2 + M) (N^{-s} - M^{-s}) + (N - M) N^{-s}, \end{aligned}$$

其中 $\psi(x) = x - [x] - 1/2$, $|\psi(x)| \leq 1/2$ 。令 $N \rightarrow \infty$, 得

$$\begin{aligned} \zeta(s) - \sum_{n \leq M} n^{-s} &= -s \int_M^\infty \psi(x) x^{-s-1} dx - \frac{s}{1-s} M^{1-s} - \left(\frac{1}{2} + M \right) M^{-s} \\ &= -s \int_M^\infty \psi(x) x^{-s-1} dx - \frac{1}{2} M^{-s} + \frac{1}{s-1} M^{1-s}. \end{aligned} \quad (39)$$

利用引理 1.1.1 的 (i) 的类似证明方法, 可知积分 $\int_M^\infty \psi(x) x^{-s-1} dx$ 对任何给定 $M > 0$ 都表示 $\operatorname{Res} > 0$ 上的解析函数。于是, 由 (39), 我们就给出函数 $\zeta(s)$ 由 $\operatorname{Res} > 1$ 到开连通集 $\{s | \operatorname{Res} > 0, s \neq 1\}$ 上的解析开拓, 并可知 $\zeta(s)$ 以 $s = 1$ 为一阶极点, 相应的残数为 1 (这种方法与定理 1.3.5 的 (ii) 的证明方法不同)。特别地, 当 $s = \sigma + it$, $1/2 \leq \sigma \leq 1$, $|t| \geq 2$ 时, 由 (39), 在其中取 $M = [2 + |t|]$, 可得

$$\begin{aligned}
 (s-1)\zeta(s) &= O\left(|s-1|\left(\sum_{n \leq M} n^{-\sigma}\right)\right) + O(M^{1-\sigma}) \\
 &\quad + O(|s-1|M^{-\sigma}) + O(|s(s-1)| \int_M^{\infty} x^{-\sigma-1} dx) \\
 &= O((|t|+2)^{2-\sigma} \log(|t|+2)); \quad (40)
 \end{aligned}$$

这里用到(i)中已证过的估计

$$\sum_{n \leq M} n^{-\sigma} \ll M^{1-\sigma} \left(\sum_{n \leq M} n^{-1}\right) \ll M^{1-\sigma} \log M.$$

当 $s = \sigma + it, 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}, |t| \geq 2$ 时, 与(35)类似可证

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} = O((|t|+2)^{1/2-\sigma}). \quad (41)$$

根据定理 1.3.5 的(ii)可知, 对于使得 $s/2$ 及 $(1-s)/2$ 都不为负整数, 且 $s \neq 0, 1$ 的 s , 成立着

$$(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) = -s\pi^{(s-1)/2}\zeta(1-s)\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{s}{2}\right).$$

因此, 当 $s = \sigma + it, 0 \leq \sigma \leq \frac{1}{2}, |t| \geq 2$ 时, 由(40)及(41)可得

$$\begin{aligned}
 (s-1)\zeta(s) &= O\left(|s\zeta(1-s)| \frac{\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}\right)}{\frac{s}{2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\right) \\
 &= O(|\zeta(1-s)|(|t|+2)^{3/2-\sigma}) \\
 &= O((|t|+2)^{3/2} \log(|t|+2)). \quad (42)
 \end{aligned}$$

令

$$H(s) = \begin{cases} (s-1)\zeta(s), & s \neq 1, \\ 1, & s = 1. \end{cases}$$

则由于 $\zeta(s)$ 仅以 $s=1$ 为极点, 且由(39), 不难验证 $H(s)$ 是个整函数(也可用函数方程来说明)。因此, 由 $H(s)$ 在闭集

$$\{s = \sigma + it \mid 0 \leq \sigma \leq 1, |t| \leq 2\}$$

上连续, 可知这时 $H(s) = O(1)$, 再由 (40) 及 (42), 可知总有估计

$$H(s) = O((|t| + 2)^{\min(2-\sigma, 3/2)} \log(|t| + 2)),$$

$$s = \sigma + it, \quad 0 \leq \sigma \leq 1.$$

若令

$$f(s) = H(s)(i(s-2))^{-(3-s)/2}(\log(s+2))^{-1},$$

$$s = \sigma + it, \quad 0 \leq \sigma \leq 1,$$

则应用最大模原理, 可与 (i) 的 (b) 中类似地证得: 存在绝对常数 $C_3 > 0$, 使得 $|f(s)| \leq C_3$ 成立。这就证明了估计

$$(s-1)\zeta(s) = O((|t| + 2)^{3/2-\sigma} \log(|t| + 2)),$$

$$s = \sigma + it, \quad 0 \leq \sigma \leq 1, s \neq 1. \quad (43)$$

当然, 若将 $s = 1$ 视为左边取极限的情形, 则 (43) 仍成立。

当 $\sigma \geq 1, |t| \geq 1$ 时, 在 (39) 中仍取 $M = [2 + |t|]$, 可得

$$\zeta(s) = O(\log M) + O\left(\frac{|s|}{M} + O(M^{-1}) + O(M^{1-\sigma})\right) = O(\log M).$$

当 $s = 1 + \frac{1}{\log x}$ 时, 取 $M = 2$, 由 (39) 可得

$$\begin{aligned} \zeta\left(1 + \frac{1}{\log x}\right) &= O(\log M) + O\left(\frac{|s|}{M}\right) + O(M^{-1}) + O(\log x) \\ &= O(\log x). \end{aligned}$$

(ii) 证毕。

注意: [PP] 中对定理 1.3.6(i) 的相关证明含有错误。

练 习

(I) 设 χ 为模 q 的原特征, $q \geq 3$, 当 $\chi(-1) = 1$ 时, 令 $\delta = 0$, 当 $\chi(-1) = -1$ 时令 $\delta = 1$ 。用函数方程证明, 对任意非负整数 n , $-\delta - 2n$ 是解析开拓后的 $L(s, \chi)$ 的单重零点。类似地, 设 n 为正整数, 证明 $-2n$ 是解析开拓后的 $\zeta(s)$ 的单重零点。

(II) 利用 § 1.2 的练习 (II), 证明当 $3 \leq q \leq 5$ 时, 若 χ 为模

q 的实原特征, 则(δ 定义同上)

$$F(u, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) n^{\delta} e^{-\pi u n^2/q} \gg e^{-2\pi u}, u \geq 1.$$

由此及函数方程(定理 1.3.5 的(i)), 证明若 s 为实数, 则 $\xi(s, \chi) \neq 0$ 。

(Ⅲ) 根据定理 1.1.5、定理 1.3.5 的(i) 及定理 1.3.6 的(i), 证明若 χ 为模 q 的原特征, $q \geq 3$, 则当 $s = \sigma + it$, $-2 \leq \sigma \leq 0$ 时,

$$L(s, \chi) = O((q(|t| + 2))^{1/2-\sigma} \log(q(|s| + 2))).$$

§ 1.4 整函数 $\xi(s, \chi)$ 的无穷乘积展开

根据定理 1.3.5 的(i) 可知, 对模 q 的任一原特征 χ , 在 $\text{Res} > 1$ 时定义的 L 函数 $L(s, \chi)$ 可以被解析开拓成一个整函数, 并且, 解析开拓之后的 $L(s, \chi)$ 按照 $\chi(-1) = 1$ 或 $\chi(-1) = -1$ 而分别以偶数 $0, -2, -4, \dots$, 或奇数 $-1, -3, -5, \dots$ 为零点。这些零点被称为 $L(s, \chi)$ 的平凡零点。因为当 $\text{Res} = \sigma > 1$ 时, 对模 q 的任一特征 χ 都有

$$|L(s, \chi)| = \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)^{-1} \Big| > \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{1}{p^{\sigma}}\right) > 0, \quad (1)$$

所以 $L(s, \chi) \neq 0$ 。当 χ 为模 q 的原特征时, 由函数方程可知, 在 $\text{Res} < 0$ 时, 在上述任何一种情况下, $L(s, \chi)$ 没有其他的零点了。现在的问题是, 当 $0 \leq \text{Res} \leq 1$ 时, $L(s, \chi)$ 是否有零点? 我们下面的研究表明, $L(1, \chi) \neq 0$, 并且 $L(s, \chi)$ 有无穷多个满足 $0 \leq \text{Res} \leq 1, s \neq 0$ 的零点 s , 我们称这些零点为非平凡零点。为达此目

的,我们需要借助于复分析中的方法,对定理 1.3.5 的(i)中引进的整函数进行较详尽的研究。一个整函数 $f(z)$ 被称为是有限阶的,如果存在一个正数 a ,使得

$$|f(z)| \ll \exp(|z|^a)$$

当 $|z|$ 充分大时成立。这时我们把这种正数 a 的下确界 μ 称为 $f(z)$ 的级。显然, $\mu \geq 0$ 。我们有

引理 1.4.1 整函数 $\xi(z, \chi)$ 是一阶的。

证明: 设 $r = 1 + \frac{2q(1+|z|)}{\pi}$, 则由 § 1.3 的估计(16)及 $\xi(z, \chi)$ 的定义可得

$$\begin{aligned} |\xi(z, \chi)| &\ll q \int_1^\infty u^{|z|+1} e^{-\pi u/q} du = q \left(\int_1^r + \int_r^\infty \right) \\ &\ll qr^{|z|+2} + q \int_r^\infty u^{|z|+1} e^{-\pi u/q} du. \end{aligned}$$

令 $g(u) = 2q(1+|z|)\log u - \pi u$, $u \geq 1$ 。因为当 $u \geq r$ 时,

$$g'(u) = 2q(1+|z|)/u - \pi < 0,$$

所以当 $u \geq r$ 时, $g(u)$ 为单调下降函数, $g(u) \leq g(r)$, 即有

$$u^{|z|+1} \leq e^{\pi u/(2q)} r^{\pi r},$$

因此,

$$\int_r^\infty u^{|z|+1} e^{-\pi u/q} du \leq \left(\int_r^\infty e^{-\pi u/(2q)} du \right) r^{\pi r} \ll qr^{\pi r},$$

$$|\xi(z, \chi)| \ll q^2 r^{\pi r}.$$

对任给 $\epsilon > 0$, 当 $|z|$ 充分大时, 即知估计 $|\xi(z, \chi)| = O(\exp(|z|^{1+\epsilon}))$ 成立。由此可知 $\xi(z, \chi)$ 的级不超过 1。另一方面, 可取 z 为充分大正数, 则由(1)有 $|L(z, \chi)| \gg 1$, 而由定理 1.1.5 的(iii)可知 $\Gamma\left(\frac{z}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{z}{2}\right) \gg \exp\left(\frac{z}{3} \log z\right)$, 所以

$$|\xi(z, \chi)| \gg (q/\pi)^{3/2} \exp\left(\frac{z}{3} \log z\right). \quad (2)$$

故 $\xi(z, \chi)$ 的级又不能小于 1。所以 $\xi(z, \chi)$ 的级为 1。证毕。

我们需要有关整函数的一些知识。

引理 1.4.2 若整函数 $g(z)$ 无零点, 则必形如 $e^{h(z)}$, $h(z)$ 为一个整函数。

证明: 若 $g(z)$ 无零点, 则 $\frac{g'(z)}{g(z)}$ 也为整函数。令

$$G(z) = \int_0^z \frac{g'(s)}{g(s)} ds,$$

这里积分路径取为从 0 到 z 的直线段。容易验证, $G(z)$ 为解析函

数, 且 $g'(z) = \frac{g'(z)}{g(z)} \cdot g(z)$ 。由于

$$(g(z)e^{-G(z)})'_z = g'(z)e^{-G(z)} - g(z)G'(z)e^{-G(z)} = 0,$$

可知解析函数 $g(z)e^{-G(z)}$ 为常数 $g(0)e^{-G(0)} = g(0)$, 从而

$$g(z) = e^{G(z)} \cdot g(0).$$

由于 $g(0) \neq 0$, 我们有 $g(0) = e^a$ 。令 $G(z) + a = h(z)$ 即得所需。证毕。

引理 1.4.3 设 $f(z)$ 为一个整函数, 其幂级数展开式为

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$, 且设 $\operatorname{Re}(f(z)) \leq M$ 当 $|z| = R$ 时成立, $R \geq 1$ 。则当 $n \geq 1$ 时, $|b_n| \leq 2(M + |b_0|)R^{-n}$ 。

证明: 令 $b_n = |b_n|e^{i\theta_n}$, $F(z) = f(z) - b_0$, 则当 $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 时, 级数

$$F(Re^{i\theta}) = \sum_{m=1}^{\infty} |b_m| R^m e^{i(\theta_m + m\theta)} \quad (3)$$

绝对且一致收敛。一方面, 逐项积分我们有

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(F(Re^{i\theta})) d\theta \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} |b_m| R^m \left(\int_0^{2\pi} \cos(\theta_m + m\theta) d\theta \right) = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

另一方面,用 $\cos(\theta_n + n\theta)$ 乘(3)式两边(其中 n 为自然数),再逐项求积分,由

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \cos(\theta_m + m\theta) \cos(\theta_n + n\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [\cos(\theta_m + \theta_n + (m+n)\theta) \\ & \quad + \cos(\theta_m - \theta_n + (m-n)\theta)] d\theta \\ &= \begin{cases} \pi, & \text{若 } m = n, \\ 0, & \text{若 } m \neq n, \end{cases} \end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(F(Re^{i\theta})) \cos(\theta_n + n\theta) d\theta \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} |b_m| R^m \int_0^{2\pi} \cos(\theta_m + m\theta) \cos(\theta_n + n\theta) d\theta \\ &= \pi |b_n| R^n. \end{aligned} \quad (5)$$

将(4)与(5)相加,可得

$$\begin{aligned} \pi |b_n| R^n &= \int_0^{2\pi} \operatorname{Re}(F(Re^{i\theta})) (1 + \cos(\theta_n + n\theta)) d\theta \\ &\leq (M + |b_0|) \int_0^{2\pi} (1 + \cos(\theta_n + n\theta)) d\theta \\ &= 2\pi (M + |b_0|). \end{aligned}$$

证毕。

引理 1.4.4 设 $q \geq 3$, χ 为模 q 原特征, 则 $L(1, \chi) \neq 0$, $\xi(0, \chi) = \xi(1, \chi) \neq 0$ 。

证明:按 χ 为复特征与实特征, 分两种情况证明 $L(1, \chi) \neq 0$ 。

(a) χ 为复特征。设 s 为实数, $s > 1$ 。对于模 q 的任一特征 ψ , 由

$$L(s, \psi) = \prod_p \left(1 - \frac{\psi(p)}{p^s} \right)^{-1} \neq 0,$$

可得

$$\begin{aligned}\frac{1}{L(s, \psi)} &= \prod_p \left(1 - \frac{\psi(p)}{p^s}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{\psi(p)}{p^s}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\sum_{p \leq x} \log\left(1 - \frac{\psi(p)}{p^s}\right)\right),\end{aligned}$$

这里对数取主分支。由于当 $|z| < \frac{1}{2}$ 时

$$\log(1+z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} (-1)^{m-1} z^m \ll |z|,$$

以及 $\sum_{p \geq 2} p^{-s} \leq \sum_{n \geq 2} n^{-s} < \infty$, 我们得

$$\begin{aligned}\frac{1}{L(s, \psi)} &= \exp\left(\sum_{p \geq 2} \log\left(1 - \frac{\psi(p)}{p^s}\right)\right) = \exp\left(-\sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \sum_{p \geq 2} \frac{\psi(p^m)}{p^{ms}}\right), \\ \left|\prod_{\psi} L(s, \psi)\right| &= \left|\exp\left(\sum_{\psi} \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \sum_{p \geq 2} \frac{\psi(p^m)}{p^{ms}}\right)\right| \\ &= \left|\exp\left(\sum_{m \geq 1} \sum_{p \geq 2} m^{-1} p^{-ms} \sum_{\psi} \psi(p^m)\right)\right| \\ &= \exp\left(\sum_{\substack{m \geq 1 \\ p^m \equiv 1 \pmod{q}}} \sum_{p \geq 2} m^{-1} p^{-ms} \varphi(q)\right) \geq 1, \quad (6)\end{aligned}$$

这里 \prod_{ψ} 与 \sum_{ψ} 表示对模 q 的所有特征求积与求和, 并在交换求和

时注意到了级数的绝对收敛性。因 χ 为复特征, 所以若 $\operatorname{Re} s > 0$, 则利用 § 1.3 的 (33) 我们可导出

$$\overline{L(s, \chi)} = L(\overline{s}, \overline{\chi}).$$

特别地, 若 $L(1, \chi) = 0$, 则 $L(1, \overline{\chi}) = 0$ 。当 ψ 为模 q 的主特征 χ_0 时, 若 $s > 1$, 则

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right). \quad (7)$$

在 $s = 1$ 处作幂级数展开, 我们有

$$L(s, \chi) = (s-1)^r G(s, \chi),$$

其中 r 为正整数, $G(s, \chi)$ 为一个整函数, $G(1, \chi) \neq 0$ 。这时, 对于 $s > 1$, 可得

$$\begin{aligned} \prod_{\psi} L(s, \psi) &= |L(s, \chi)|^2 \cdot L(s, \chi_0) \cdot \prod_{\psi} 'L(s, \psi) \\ &= \left((s-1)^{2r-1} \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^s} \right) \prod_{\psi} 'L(s, \psi) \right) \\ &\quad \cdot H(s) |G(s, \chi)|^2, \end{aligned} \quad (8)$$

这里 $\prod_{\psi} 'L(s, \psi)$ 表示 $\psi \neq \chi, \bar{\chi}, \chi_0$, $H(s)$ 为定理 1.3.6 的(ii) 证明中引入的函数

$$H(s) = \begin{cases} (s-1)\zeta(s), & s \neq 1, \\ 1, & s = 1. \end{cases} \quad (9)$$

我们已证明 $H(s)$ 为整函数, 因此当 $1 < s < 3/2$ 时, $|H(s)| \leq C$, C 为某个绝对常数。由(6)与(8), 令 $s \rightarrow 1$, 得到 $0 \geq 1$, 这一矛盾说明 $L(1, \chi) \neq 0$ 。

(b) χ 为实特征。假设 $L(1, \chi) = 0$, 我们将用较复杂的方法导出一个矛盾。由 $L(1, \chi) = 0$, 在 $s = 1$ 处作幂级数展开, 我们有

$$L(s, \chi) = (s-1)G(s, \chi),$$

这里 $G(s, \chi)$ 为一个整函数。当 $\text{Res} > \frac{1}{2}$ 时, 令

$$F(s) = \frac{G(s, \chi)H(s)}{L(2s, \chi_0)} \prod_{p|q} (1 - p^{-s}). \quad (10)$$

显然, $F(s)$ 是 $\text{Res} > \frac{1}{2}$ 上的解析函数, 且当 $\text{Res} > 1$ 时, 由(7)及(9)可得

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{L(s, \chi)L(s, \chi_0)}{L(2s, \chi_0)} \\ &= \prod_p \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_0(p)}{p^s} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\chi_0(p)}{p^{2s}} \right) \end{aligned}$$

$$= \prod_{p \nmid q} \left(\frac{1 + \chi_0(p)p^{-s}}{1 - \chi(p)p^{-s}} \right) = \prod_{\substack{p \nmid q \\ \chi(p)=1}} ((1 + p^{-s})(1 - p^{-s})^{-1}).$$

令 $a(1) = 1$, 及当 $n \geq 2$ 时

$$a(n) = \begin{cases} 1, & \text{若对 } n \text{ 的每个素因子 } p, \text{ 都有 } p \nmid q \text{ 且 } \chi(p) = 1, \\ 0, & \text{否则。} \end{cases}$$

容易验证 $a(n)$ 为完全积性函数。若用 \prod_p' 表示对满足 $p \nmid q$ 且 $\chi(p) = 1$ 的所有素数 p 求积, 则当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时, 由引理 1.3.1 可得

$$\begin{aligned} \prod_p' (1 + p^{-s}) &= \prod_{p \geq 2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{|\mu(p^m)| a(p^m)}{p^{ms}} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n) |\mu(n)|}{n^s}, \\ \prod_p' (1 - p^{-s})^{-1} &= \prod_{p \geq 2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a(p^m)}{p^{ms}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} b(n) n^{-s}, \\ b(n) &= \sum_{mk=n} a(mk) |\mu(m)| \geq 0, \\ b(1) &= 1. \end{aligned} \tag{11}$$

不难看出 $|b(n)| \leq \tau(n)$, 这里 $\tau(n)$ 为除数函数。设 ϵ 为一个小正数。用 $C(\epsilon)$ 表示圆 $\{|s-2| = 3/2 - \epsilon\}$, 则当 $|\xi-2| \leq 3/2 - 2\epsilon$ 时, 由残数定理可知

$$F(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(\epsilon)} \frac{F(s)}{s - \xi} ds.$$

当 $s \in C(\epsilon)$, $|\xi-2| \leq 3/2 - 2\epsilon$ 时, 设 N 为任一正整数, 则

$$\begin{aligned} \frac{1}{s - \xi} &= \frac{1}{(s-2) - (\xi-2)} = \frac{1}{s-2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi-2}{s-2} \right)^n \\ &= \frac{1}{s-2} \sum_{n=0}^N \left(\frac{\xi-2}{s-2} \right)^n + O\left(\frac{1}{\epsilon} \left(\frac{3/2 - 2\epsilon}{3/2 - \epsilon} \right)^{N+1} \right), \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \sum_{n=0}^N \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C(\epsilon)} \frac{F(s)}{s-2} \left(\frac{\xi-2}{s-2} \right)^n ds \right) \\ &= O \left(\frac{M}{\epsilon} \left(\frac{3/2-2\epsilon}{3/2-\epsilon} \right)^{N+1} \right), \end{aligned}$$

其中 $M = M(\epsilon) = \max_{s \in C(\epsilon)} |F(s)|$ 。令 $N \rightarrow \infty$ 可得

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \sum_{n=0}^{\infty} F(n, \epsilon) (\xi-2)^n, \\ F(n, \epsilon) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(\epsilon)} \frac{F(s)}{(s-2)^{n+1}} ds. \end{aligned} \quad (12)$$

用引理 1.3.4, 在(12)中求导, 可得

$$F^{(r)}(2) = r! F(r, \epsilon), r \geq 0.$$

另外, 用引理 1.3.4 (利用 $|b(n)| \leq \tau(n)$ 及 $\sum \tau(n)n^{-\sigma} < \infty, \sigma > 1$), 在(11)中求导, 可得

$$\begin{aligned} F^{(r)}(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} b(n) (-\log n)^r n^{-2} \\ &= (-1)^r \sum_{n=1}^{\infty} b(n) (\log n)^r n^{-2}, r \geq 0. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} (-1)^r F(r, \epsilon) &= \frac{1}{r!} \sum_{n \geq 1} b(n) (\log n)^r n^{-2} \geq 0, \\ F(\xi) &= \sum_{r \geq 0} (-1)^r F(r, \xi) (2-\xi)^r \geq F(0, \xi) \\ &= F(2) = \sum_{n=1}^{\infty} b(n) n^{-2} \geq b(1) = 1. \end{aligned}$$

特别地, 当 $\xi = 1/2 + 2\epsilon$ 时, 有

$$F(1/2 + 2\epsilon) \geq 1. \quad (13)$$

但另一方面, 在 $\text{Res} > 1/2$ 时, 由(7)及(10)可知

$$F(s) = \frac{G(s, \chi) H(s)}{H(2s)} (2s-1) \prod_{p|q} (1+p^{-s})^{-1}.$$

由于 $H(1) = 1, G(s, \chi), H(s)$ 及 $H(2s)$ 为整函数, 因此当 $s = 1/2 + 2\epsilon$ 且 ϵ 充分小时

$$|F(s)| \leq |\lambda(\chi, q)|(2s - 1) = 4\epsilon |\lambda(\chi, q)|, \quad (14)$$

其中 $\lambda(\chi, q)$ 是仅与 χ 及 q 有关的常数。由 (13) 和 (14), 在 ϵ 充分小时就得出矛盾。这说明 $L(1, \chi) \neq 0$ 。

综合两种情况, 对于模 q 的原特征 χ , 总有 $L(1, \chi) \neq 0$ 。由定理 1.3.5 的 (i) 可知 $\xi(1, \chi) = \xi(0, \chi) \neq 0$ 。证毕。

引理 1.4.5 设 χ 为模 q 的原特征。 $q \geq 3, \xi(s, \chi)$ 共有可列无限多个零点 ρ , 它们都满足 $0 \leq \operatorname{Re} \rho \leq 1, \rho \neq 0, 1$, 并且若按绝对值增长的顺序将这些零点排列为 $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$, 即 $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots$, 其中每个零点是几阶的就重复排列几次, 则 $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ 就是 $L(s, \chi)$ 的全部非平凡零点。任给正数 ϵ , 还有 $\sum_{n \geq 1} |z_n|^{-1-\epsilon} < \infty$ 。

证明: 简记 $\xi(s, \chi) = f(s)$ 。我们分几步证明。

(a) 由引理 1.4.4 可知 $\xi(0, \chi) = \xi(1, \chi) \neq 0$ 。我们断言 $f(z)$ 必有零点。否则, 由引理 1.4.2, $f(z) = e^{h(z)}$, $h(z)$ 为一个整函数。由引理 1.4.1 可知, 任给充分小正数 ϵ , 都可取得正数 $R_0(\epsilon, q)$, 使得当 $|z| = R > R_0(\epsilon, q)$ 时

$$|f(z)| = e^{\operatorname{Re}(h(z))} \leq \exp(R^{1+\epsilon}).$$

因此 $\operatorname{Re}(h(z)) \leq R^{1+\epsilon}$ 当 $|z| = R$ 时成立。由引理 1.4.3 可知, 若

$\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 为 $h(z)$ 在 $z = 0$ 处的幂级数展开式, 则

$$|b_n| \leq 2(R^{1+\epsilon} + |b_0|)R^{-n}, n \geq 1.$$

当 $n \geq 2$ 时, 令 $R \rightarrow \infty$, 可得 $b_n = 0$ 。所以 $h(z) = \alpha z + \beta$, α 与 β 为适当常数, 但这是不可能的, 因为由 (2), 当 z 充分大时就会产生矛盾。所以 $f(z)$ 必有零点。

(b) $f(z)$ 必有无限多个零点。

否则, 设 z_1, \dots, z_n 为 $f(z)$ 全部零点 (m 阶零点已在其中计数了 m 次), $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n|$ 。与 (a) 类似地可导出矛盾。因为一个整函数在每一点处的幂级数展开式的收敛半径都是无穷大的, 故通过在 $f(z)$ 的每个零点处作幂级数展开, 容易看到存在一个整函数 $f_1(z)$, 它不以 z_1, z_2, \dots, z_n 为零点, 且满足

$$f(z) = \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) f_1(z)。$$

由于 $f_1(z)$ 的零点就是 $f(z)$ 的零点, 所以 $f_1(z)$ 无零点。由引理 1.4.2 可知 $f_1(z) = e^{b_1(z)}$, $b_1(z)$ 为一个整函数。由引理 1.4.1, 任给 $\epsilon > 0$, 存在正数 $R_0(\epsilon, q)$, 当 $R > R_0(\epsilon, q)$, $|z| = R$ 时,

$$|f(z)| \leq \exp(R^{1+\epsilon})。$$

现在取 $R > \max(R_0(\epsilon, q), 2|z_n|)$, 则当 $|z| = R$ 时,

$$\begin{aligned} |f_1(z)| &= e^{\operatorname{Re}(b_1(z))} = f(z) \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{z}{z_i}\right)^{-1} \\ &\leq |f(z)| \prod_{i=1}^n \left|\frac{z}{z_i} - 1\right|^{-1} \\ &\leq |f(z)| \leq \exp(R^{1+\epsilon}), \end{aligned}$$

因此, $\operatorname{Re}(b_1(z)) \leq R^{1+\epsilon}$ 。由此, 可与 (a) 类似地, 应用引理 1.4.3 得到 $b_1(z) = \alpha z + \beta$, α 及 β 为常数。但若取 z 为充分大正数, 则由 (2) 可得出矛盾, 因为这时我们有

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \left(1 - \frac{z}{z_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{|\alpha|z + |\beta|} \\ &\leq \left(\prod_{i=1}^n \left(1 + \frac{z}{z_i}\right)\right) e^{|\alpha|z + |\beta|} \\ &\leq \exp\left(\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{|z_i|} + |\alpha|\right)z + |\beta|\right)。 \end{aligned}$$

所以 $f(z)$ 必有无限多个零点。

(c) 因为一个非常数的整函数在每个形如 $|z| \leq N$ (N 为正整数) 的有界区域里仅可能有有限多个零点, 我们看到 $f(z)$ 在全

复 z 平面上共有可列无穷多个零点,且按绝对值的大小可把这些零点记为(记法可能不止一种) z_1, \dots, z_n, \dots , 即 $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots$, 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$ 。由本节开头的说明,定理 1.3.5 的(i)中 $\xi(s, \chi)$ 与 $L(s, \chi)$ 的关系,及定理 1.1.5 的(iii),可知当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时 $f(s) \neq 0$ 。由函数方程又可知当 $\operatorname{Re} s < 0$ 时, $f(s) \neq 0$ 。因此,所有的根 z_i 都满足 $0 \leq \operatorname{Re} z_i \leq 1$ 。再由定理 1.1.5 的(iii)与定理 1.3.5 的(i),可知 z_1, \dots, z_n, \dots , 即为 $L(z, \chi)$ 的全部非平凡零点(注意,当 $|z_k| = |z_{k+1}|$ 时,我们可按 $\operatorname{Im} z_{k+1} \geq \operatorname{Im} z_k$ 的顺序排列)。

(d) 任给 $\epsilon > 0$, 由引理 1.4.1 可知存在 $R_0(\epsilon, q) > 0$, 使得当 $R > R_0(\epsilon, q)$ 时,

$$\max_{|z|=2R} |f(z)| \leq \exp(R^{1+\epsilon/2}).$$

设 $f(z)$ 的位于闭圆盘 $|z| \leq R$ 中的零点共有 k 个, 它们为 z_1, \dots, z_k , 其中重零点是几重就算几个, 且零点是按绝对值的增长顺序排列的。分别在各个零点处做整函数的幂级数展开, 可知

$$f(z) = \left(\prod_{i=1}^k (z - z_i) \right) g(z),$$

这里 $g(z)$ 为整函数, 且 $g(0) \neq 0, g(z_i) \neq 0$ 。由解析函数的最大模原理可得

$$\begin{aligned} |g(0)| &\leq \max_{|z|=2R} |g(z)| \leq \max_{|z|=2R} \left(|f(z)| \cdot |z|^{-k} \prod_{i=1}^k \left| 1 - \frac{z_i}{z} \right| \right)^{-1} \\ &\leq \exp(R^{1+\epsilon/2}) (2R)^{-k} \cdot 2^k, \end{aligned}$$

所以, 当 $R > R_1(\epsilon, q) > R_0(\epsilon, q)$ 时,

$$R^k \leq \exp(R^{1+\frac{1}{2}\epsilon}) |g(0)|^{-1} \leq \exp(R^{1+2\epsilon/3}),$$

从而 $k \leq R^{1+2\epsilon/3}$ 。

(e) 设 $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ 是在(c)中排列的 $f(z)$ 的全部零点, ϵ

是任意正数。我们证明: $\sum_{n \geq 1} |z_n|^{-1-\varepsilon} < \infty$ 。为此, 设 $R_1 = R_1(\varepsilon, q)$ 是(d) 中确定的与 ε 及 q 有关的正数, 则当 $R > R_1$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{R < |z_n| \leq 2R} |z_n|^{-1-\varepsilon} &\leq R^{-1-\varepsilon} \left(\sum_{|z_n| \leq 2R} 1 \right) R^{-1-\varepsilon} (2R)^{1+2\varepsilon/3} \\ &\leq 2^{1+\varepsilon} R^{-\varepsilon/3}. \end{aligned}$$

取 $R = 2^i R_1, i \geq 1, i$ 为正整数, 然后对 i 求和, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{2R_1 < |z_n| \leq 2^{J+1} R_1} |z_n|^{-1-\varepsilon} &\leq \sum_{1 \leq i \leq J} 2^{1+\varepsilon} (2^i R_1)^{-\varepsilon/3} \\ &< 2^{1+\varepsilon} R_1^{-\varepsilon/3} (2^{\varepsilon/3} - 1)^{-1}. \end{aligned}$$

令 $J \rightarrow \infty$, 就可知 $\sum_{n \geq 1} |z_n|^{-1-\varepsilon} < \infty$ 。证毕。

有了这些准备, 我们来证明。

定理 1.4.6 设 χ 为模 q 的原特征, 整函数 $\xi(s, \chi)$ 由定理 1.3.5 的(i) 中定义, 则

$$\xi(s, \chi) = e^{as+b} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{z_n} \right) e^{s/z_n},$$

其中 $a = a(\chi)$ 和 $b = b(\chi)$ 是与 χ 有关的常数, $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ 是引理 1.4.5 中所述的 $\xi(s, \chi)$ 的全部零点, 它们是按照绝对值递增的顺序排列的, 即 $0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots$, 其中零点是几阶的就重复计数几次, 无穷乘积的值理解为极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \prod_{|z_n| \leq x} \left(1 - \frac{s}{z_n} \right) e^{s/z_n}.$$

证明: 分成几个步骤。

(a) 对每个复数 z 及正数 r , 定义

$$P(x, z) = \prod_{|z_n| \leq x} \left(1 - \frac{z}{z_n} \right) e^{z/z_n}.$$

我们指出, 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x, z)$ 对每个 z 都收敛, 且代表一个整函数。

事实上, 对给定的复数 s , 设 z 为任意的满足 $|z - s| < (|s| +$

1)/2 的复数。由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$, 选取正整数 k 适当大, 使得 $|z_k| > 3|s| + 1$ 。设 $x > |z_k|$, 则

$$P(x, z) = P(|z_k|, z) \prod_{|z_k| < |z_n| \leq x} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n}.$$

当 $|z_n| > |z_k|$ 时, 由 $|z| < (3|s| + 1)/2$ 及 $|z_k| > 3|s| + 1$, 可得 $|z/z_n| < 1/2$, 所以

$$1 - \frac{z}{z_n} = \exp\left(\log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)\right),$$

其中对数函数选取主分支, 它满足 $\log 1 = 0$ 。这样一来, 我们看到

$$P(x, z) = P(|z_k|, z) \exp\left[\sum'_x \left(\log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + \frac{z}{z_n}\right)\right], \quad (15)$$

其中 \sum'_x 表示条件 $|z_k| < |z_n| \leq x$ 。由 $\log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right)$ 的 Taylor 展开式, 我们有

$$\begin{aligned} \log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + \frac{z}{z_n} &= - \sum_{u \geq 2} \frac{1}{u} \left(\frac{z}{z_n}\right)^u \\ &= O\left(\sum_{u \geq 2} \left|\frac{z}{z_n}\right|^u\right) = O\left(\left|\frac{z}{z_n}\right|^2\right). \end{aligned} \quad (16)$$

由此及 $\sum_{n \geq 1} |z_n|^{-3/2} < \infty$ (见定理 1.4.5), 可知

$$\begin{aligned} \sum'_x \left[\log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + \frac{z}{z_n}\right] &= \sum' \left[\log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + \frac{z}{z_n}\right] \\ &\quad + O(|z|^2 x^{-1/2}), \end{aligned}$$

这里 \sum' 表示对一切满足 $|z_n| > |z_k|$ 的 z_n 求和。如此一来, 在 (15) 中令 $x \rightarrow \infty$, 可得

$$\lim_{x \rightarrow \infty} P(x, z) = P(|z_k|, z) \exp\left[\sum' \left(\log\left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + \frac{z}{z_n}\right)\right]. \quad (17)$$

此式对一切位于开圆盘 $D = \{z | |z - s| < (|s| + 1)/2\}$ 中的复数 z 都成立。由定义不难类似地证明, 当 $z \in D$ 时, 还有

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n} = P(|z_k|, z) \exp \left[\sum' \left(\log \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + \frac{z}{z_n} \right) \right]. \quad (18)$$

对于满足 $|z_n| > |z_k|$ 的每个 $n > k$, 以及 $z \in D$, 令

$$F_n(z) = \log \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) + \frac{z}{z_n}.$$

应用引理 1.3.4, 可证级数 $\sum' F_n(z)$ 为 D 上解析函数, 且

$$\left(\sum' F_n(z)\right)' = \sum' F_n'(z) = \sum' \left(\frac{1}{z - z_n} + \frac{1}{z_n}\right). \quad (19)$$

事实上, 对任意的 $\alpha_0 \in D$, 令 $\delta = (3|s| + 1)/12$, 则当 $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ 时 (α 为复数),

$$|\alpha| < |\alpha_0| + \delta < \frac{7}{12}(3|s| + 1), \quad (20)$$

$$|\alpha + \delta_1| \leq |\alpha| + \delta < \frac{2}{3}(3|s| + 1),$$

这里 $0 < |\delta_1| < \delta$ 。所以, 当 $|z_n| > |z_k| > 3|s| + 1$ 时, $|\alpha/z_n| < 7/12$ 。因此, 由 (16) 可知级数 $\sum' F_n(\alpha)$ 收敛。由于当 $|y| < 1$ 时,

$$\log(1 - y) + y = - \sum_{u \geq 2} \frac{1}{u} y^u,$$

所以当 $0 < |\delta_1| < \delta, \alpha_0 \in D$ 时, 由 (20) 可得

$$\begin{aligned} |F_n(\alpha_0 + \delta_1) - F_n(\alpha_0)| &\leq \sum_{u \geq 2} \frac{1}{u} |(\alpha_0 + \delta_1)^u - \alpha_0^u| |z_n|^{-u} \\ &\leq |\delta_1| \cdot \sum_{u \geq 2} (\max(|\alpha_0 + \delta_1|, |\alpha_0|))^{u-1} |z_n|^{-u} \\ &\leq |\delta_1| \cdot (|\alpha_0| + |\delta_1|) |z_n|^{-2} \\ &\quad \cdot \sum_{u \geq 0} \left(\frac{\max(|\alpha_0 + \delta_1|, |\alpha_0|)}{|z_n|} \right)^u \\ &\leq |\delta_1| \cdot (|\alpha_0| + \delta) |z_n|^{-2} \sum_{u \geq 0} \left(\frac{2}{3} \right)^u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 3|\delta_1|(|\alpha_0| + \delta)|z_n|^{-2}, \\
 |F'_n(\alpha_0)| &= \frac{|\alpha_0|}{|(\alpha_0 - z_n)z_n|} \leq \frac{|\alpha_0|}{(|z_n| - |\alpha_0|)|z_n|} \\
 &\leq \frac{2|\alpha_0|}{|z_n|^2},
 \end{aligned}$$

因此,由 $\sum_{n \geq 1} |z_n|^{-2} < \infty$ 及引理 1.3.4, 就可知

$$\left(\sum' F_n(\alpha)\right)'_{\alpha=\alpha_0} = \sum' F'_n(\alpha_0).$$

将 α_0 换成 z , 即得 (18)。因此, 由 (17) 可知 $\lim_{x \rightarrow \infty} P(x, z)$ 不仅在 D 上存在, 而且代表 D 上一个解析函数。由 s 的任意性, (17) 及 (18), 就得知极限

$$\begin{aligned}
 P(z) &= \lim_{x \rightarrow \infty} P(x, z) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n} \\
 &= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n}
 \end{aligned} \tag{21}$$

为一个整函数。

(b) 对于 (21) 中定义的整函数 $P(z)$, 我们有 $\xi(z, \chi) = P(z)e^{G(z)}$, $G(z)$ 为一个整函数。

根据定义及以上推导, 可知 $P(z_r) = 0, r = 1, 2, \dots$, 而若 $z \neq z_1, z_2, \dots$, 则 $P(z) \neq 0$ 。简记 $f(z) = \xi(z, \chi)$ 。对于 $f(z)$ 的任一个零点 z_r , 由幂级数展开式, 可得

$$f(z) = (z - z_r)^h F_r(z), \tag{22}$$

其中 h 为零点 z_r 的阶数, $F_r(z)$ 为一个整函数, $F_r(z_r) \neq 0$ 。又由定义有

$$P(z) = (z - z_r)^h p_r(z)$$

$$p_r(z) = (-1)^h e^{hz/z_r} z_r^{-h} \prod_{z_n \neq z_r} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n},$$

其中 $p_r(z_r) \neq 0$ 。定义一个函数 $g(z)$ 如下:

$$g(z) = \begin{cases} f(z)/P(z), & \text{当 } z \neq z_1, z_2, \dots \text{ 时,} \\ F_r(z_r)/p_r(z_r), & \text{当 } z = z_r, r = 1, 2, \dots \text{ 时.} \end{cases} \quad (23)$$

显然, $g(z)$ 在复平面无零点。若 s_0 不为 $f(z)$ 的零点, 因为不为常数的解析函数在有界区域中仅有有限个零点, 我们可选取 $\delta > 0$, 使当 $|s - s_0| < \delta$ 时, s 不为 $f(z)$ 的零点, 从而 $g(z) = f(z)/P(z)$ 在 $z = s_0$ 处可导。若 s_0 为 $f(z)$ 的零点, 设 $s_0 = z_r$, 则由前述说明, 可选取 $\delta_r > 0$, 使得当 $|z - z_r| < \delta_r$ 时, $F_r(z) \neq 0, p_r(z) \neq 0$, 因此 $F_r(z)/p_r(z)$ 为 $\{z \mid |z - z_r| < \delta_r\}$ 中的解析函数。当 $|z - z_r| < \delta_r$ 时, 若 $z \neq z_r$, 我们有

$$\frac{F_r(z)}{p_r(z)} = \frac{f(z)}{P(z)},$$

而

$$\frac{F_r(z_r)}{p_r(z_r)} = \lim_{z \rightarrow z_r} \frac{f(z)}{P(z)}.$$

故由定义就可知 $g(z)$ 在 $z = z_r = s_0$ 处可导, 且

$$g'(s_0) = g'(z_r) = (F_r(z)/p_r(z))'_{z=z_r}.$$

因此 $g(z)$ 为一个整函数, 处处不为零, 且满足 $f(z) = P(z)g(z)$ 。由引理 1.4.2, 可知 $g(z) = e^{G(z)}$, $G(z)$ 为一个整函数。

(c) 由(b)中确定的整函数 $G(z)$ 为一个一次多项式, 即 $G(z) = az + b$, a 与 b 为仅与 q 及 χ 有关的常数。

仍简记 $f(z) = \xi(z, \chi)$ 。任给正数 ε , 由引理 1.4.1 可知, 存在 $R_0 = R_0(\varepsilon, q)$, 当 $|z| > R_0$ 时

$$|f(z)| < \exp(|z|^{1+\varepsilon/2}). \quad (24)$$

设 R 为任一正数, $R > R_0(\varepsilon, q)$ 。当 $|z| = R$ 且 $f(z) \neq 0$ 时, 我们得

$$e^{G(z)} = \frac{f(z)}{P(z)} = f(z)(P(2R, z))^{-1} \cdot \prod_{|z_n| > 2R} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right)^{-1} e^{z/z_n}, \quad (25)$$

这里一切记号由(a)、(b)中确定。令

$$E(z) = \begin{cases} f(z)(P(2R, z))^{-1}, & \text{若 } |z| > 2R \text{ 或 } |z| \leq 2R, f(z) \neq 0, \\ F_r(z_r)(-z_r)^{-h} e^{-hz/z_r} \prod_{\substack{|z_n| \leq 2R \\ z_n \neq z_r}} \left(1 - \frac{z_r}{z_n}\right)^{-1} e^{-z_r/z_n}, & \\ \text{若 } |z| \leq 2R \text{ 且 } z = z_r, f(z_r) = 0, \end{cases}$$

这里整函数 $F_r(z)$ 由(22)给出。与证明(23)中定义的函数 $g(z)$ 是整函数类似地, 可证 $E(z)$ 是个整函数。因此当 $|z| = R > R_0$ 时, 由(24)及解析函数的最大模原理, 可得

$$\begin{aligned} |E(z)| &\leq \max_{|s|=4R} |E(s)| < \exp((4R)^{1+\varepsilon/2}) \prod_{|z_n| \leq 2R} \left(\frac{4R}{z_n} - 1\right)^{-1} \\ &\leq \exp((4R)^{1+\varepsilon/2}). \end{aligned} \quad (26)$$

由(25), 当 $f(z) \neq 0, |z| = R$ 时可得

$$\begin{aligned} e^{G(z)} &= E(z) \prod_{|z_n| > 2R} (1 - z/z_n)^{-1} e^{-z/z_n} \\ &= E(z) \cdot \exp\left[\sum_{|z_n| > 2R} (-\log(1 - z/z_n) - z/z_n)\right], \end{aligned} \quad (27)$$

但由于 $E(z)$ 为整函数, 无穷乘积所代表的函数在 $|z| < 3R/2$ 上解析(参见(a)), 所以(27)式当 $|z| = R$ 且 z 为 $f(s)$ 的零点时也成立。当 $|z| = R$ 时, 由(16)可得

$$\begin{aligned} \sum_{|z_n| > 2R} (-z/z_n - \log(1 - z/z_n)) &= O\left(\sum_{|z_n| > 2R} |z/z_n|^2\right) \\ &= O(R^2(2R)^{-1+\varepsilon/2} \sum_{r \geq 1} |z_n|^{-1-\varepsilon/2}) \\ &= O(R^{1+\varepsilon/2} 2^{-1+\varepsilon/2}); \end{aligned}$$

这里用到 $\sum_{n \geq 1} |z_n|^{-1-\varepsilon/2} < \infty$ 。因此, 由(26)及(27), 存在正数

$R_1(\epsilon, q), R_1(\epsilon, q) > R_0(\epsilon, q)$, 使得当 $|z| = R > R_1(\epsilon, q)$ 时,

$$e^{G(z)} = O(\exp((4^{1+\epsilon/2} + 2^{-1+\epsilon/2})R^{1+\epsilon/2})) < \exp(R^{1+\epsilon}).$$

由此, 可用引理 1.4.5 证明的(a) 中类似的方法, 应用引理 1.4.3, 证明 $G(z)$ 为一个一次多项式, 即 $G(z) = az + b$, 这里 a 与 b 是与 q 及 χ 有关的常数。证毕。

当 $\text{Res} > 1, \chi$ 为模 q 的任一特征时, 由(i) 可知 $L(s, \chi) \neq 0$ 。

因此 $\frac{1}{L(s, \chi)}$ 是 $\text{Res} > 1$ 上的解析函数, 且

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(s, \chi)} &= \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\prod_{p \leq x} \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\sum_{p \leq x} \log\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)\right) \\ &= \exp\left(\sum_{p \geq 2} \log\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right)\right), \end{aligned} \quad (28)$$

这里对数函数的值取主分支。对任意的复数 $\alpha_0, \text{Re} \alpha_0 > 1$, 取充分小正数 δ , 使得 $\text{Re} \alpha_0 - \delta > 1$ 。对任意复数 $s, \text{Res} > 0$, 令

$$F_n(s) = \begin{cases} \log\left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s}\right), & \text{若 } n = p \text{ 为素数,} \\ 0, & \text{否则。} \end{cases}$$

则由 $F_n(s) = O\left(\left|\frac{1}{n^s}\right|\right)$, 当 $|\alpha - \alpha_0| \leq \delta$ 时, 可知 $\sum_{n \geq 2} F_n(\alpha)$ 收敛。当 $\text{Res} > 0$ 时, 令

$$g_p(s) = \frac{\chi(p)}{p^s - \chi(p)}, \quad f_p(s) = \int_1^s g_p(z) dz,$$

其中积分是沿由 1 至 s 的直线段取的。显然, $g_p(s)$ 是 $\text{Res} > 0$ 上解析函数, 而由定义则可容易地验证 $f_p(s)$ 也为 $\text{Res} > 0$ 上的解析函数, 且 $f'_p(s) = g_p(s) = (F_p(s))'$ 。因此

$$(F_p(s) - f_p(s))' = 0,$$

这说明 $F_p(s) - f_p(s)$ 在开连通集 $\{s | \text{Res} > 0\}$ 上为常数, 于是

$$F_p(s) = f_p(s) + F_p(1)。$$

因此,当 $n = p$ 为素数, $0 < |\delta_0| < \delta$ 时

$$|F_n(\alpha_0 + \delta_1) - F_n(\alpha_0)| = \left| \int_{\alpha_0}^{\alpha_0 + \delta_1} g_p(z) dz \right| \leq |\delta_1| \cdot \frac{1}{p^{\operatorname{Re} \alpha_0 - \delta} - 1},$$

又

$$|F'_n(\alpha_0)| = |g_p(\alpha_0)| \leq \frac{1}{p^{\alpha_0} - 1} < \frac{1}{p^{\operatorname{Re} \alpha_0 - \delta} - 1}。$$

因为 $\sum_p (p^{\operatorname{Re} \alpha_0 - \delta} - 1)^{-1} \ll \sum_p p^{\delta - \operatorname{Re} \alpha_0} < \infty$, 由引理 1.3.4 可知

$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha)$ 在 $\alpha = \alpha_0$ 处可导, 且

$$\left(\sum_{n \geq 2} F_n(\alpha) \right)' \Big|_{\alpha = \alpha_0} = \sum_{n \geq 2} F'_n(\alpha_0)。$$

这说明 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(s)$ 在 $\operatorname{Res} > 1$ 上解析, 且

$$\left(\sum_{p \geq 2} \log \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right) \right)' = \sum_{p \geq 2} \frac{\chi(p) \log p}{p^s - \chi(p)}。 \quad (29)$$

由(28)及(29), 在(28)式两边对 s 求导, 可得

$$\begin{aligned} -\frac{L'(s, \chi)}{L^2(s, \chi)} &= \exp \left(\sum_p \log \left(1 - \frac{\chi(p)}{p^s} \right) \right) \times \\ &\quad \left(\sum_p \frac{\chi(p) \log p}{p^s - \chi(p)} \right)。 \end{aligned} \quad (30)$$

由(28)及(30), 我们得到

$$-\frac{L'(s, \chi)}{L^2(s, \chi)} = \sum_p \frac{\chi(p) \log p}{p^s - \chi(p)}, \quad \operatorname{Res} > 1。 \quad (31)$$

对任意正整数 n , von Mangoldt 函数 $\Lambda(n)$ 定义为

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, & \text{若 } n = p^m, p \text{ 为素数, } m \text{ 为正整数,} \\ 0, & \text{否则。} \end{cases}$$

当 $\operatorname{Res} > 1$ 时, 我们看到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s} &= \sum_{p \geq 2} \log p \sum_{m \geq 1} \frac{\chi(p^m)}{p^{ms}} = \sum_p \log p \sum_{m \geq 1} \left(\frac{\chi(p)}{p^s} \right)^m \\ &= \sum_p \log p \cdot \frac{\chi(p)p^{-s}}{1 - \chi(p)p^{-s}} = \sum_p \frac{\chi(p) \log p}{p^s - \chi(p)}. \end{aligned} \quad (32)$$

由(31)与(32),我们得

$$-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)\Lambda(n)}{n^s}, \quad \text{Res} > 1. \quad (33)$$

等式(33)是我们用解析数论的方法研究求和 $\sum_{n \leq x} \chi(n)\Lambda(n)$ 乃至素数在算术级数中分布的基础,因为由定理 1.3.5 和引理 1.4.5, 我们已经掌握了有关 L 函数的许多知识,特别地若 χ 为原特征, 则可知函数 $L'(s, \chi)/L(s, \chi)$ 在复 s 平面上去掉了 $-\delta - 2n (n \geq 0)$ 及 $\xi(s, \chi)$ 的全部可列个零点 $z_1, z_2, \dots (0 \leq \text{Re} z_i \leq 1, z_i \neq 0, z_i \neq 1, i \geq 1)$ 之外的开连通集 $D = D(\chi)$ 中是解析的(当 $\chi(-1) = 1$ 时, $\delta = 0$, 当 $\chi(-1) = -1$ 时, $\delta = 1$)。下面的结果则给出 L'/L 的包含其零点及 Γ 函数的展开式。

推论 1.4.7 设 χ 为模 q 的原特征, $q \geq 3$, 令

$$D(\chi) = \{s \mid s \neq -\delta, -\delta - 2, -\delta - 4, \dots, z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\},$$

其中当 $\chi(-1) = 1$ 时 $\delta = 0$, 当 $\chi(-1) = -1$ 时, $\delta = 1$, 而 z_1, z_2, \dots 为由引理 1.4.5 和定理 1.4.6 所确定的 $\xi(s, \chi)$ 的全部零点, 也即 $L(s, \chi)$ 的全部非平凡零点, 它们满足

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \dots, 0 \leq \text{Re} z_i \leq 1, z_i \neq 1 (i \geq 1),$$

$$\sum_{n \geq 1} |z_n|^{-1-\epsilon} < \infty, \text{ 对所有 } \epsilon > 0.$$

$D(\chi)$ 为一个连通开集, 且当 $s \in D(\chi)$ 时, 我们有

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = -\frac{1}{2} \log\left(\frac{q}{\pi}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'\left(\frac{s+\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)} + \alpha(\chi)$$

$$+ \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{s - z_n} + \frac{1}{z_n} \right), \quad (34)$$

其中 $a(\chi)$ 是由定理 1.4.6 中确定的与 χ 有关的常数, 它满足

$$\operatorname{Re}(a(\chi)) = - \sum_{n \geq 1} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z_n} \right).$$

证明: 分两步证明 (34) 当 $s \in D(\chi)$ 时成立, 即先证明式 (34) 在复 s 平面上的一个小开连通集上成立, 然后对等式两边进行解析开拓, 证明当 $s \in D(\chi)$ 时 (34) 总成立。

(a) 设 $c_1 = \min \left(\frac{1}{2} |z_1|, \frac{1}{2} \right)$, $D_1 = \{s \mid |s| < c_1, s \neq 0, \text{且 } s \text{ 不为负实数}\}$, D_1 是复 s 平面上的一个开连通集。当 $s \in D_1$ 时, 由定理 1.3.5 的 (i) 和定理 1.4.6, 得到

$$\begin{aligned} \xi(s, \chi) &= L(s, \chi) (q\pi^{-1})^{\frac{1}{2}(s+\delta)} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) \\ &= \exp\left(as + b + \sum_{n \geq 1} \left(\log\left(1 - \frac{s}{z_n}\right) + \frac{s}{z_n}\right)\right), \end{aligned}$$

其中对数函数取主分支。可与定理 1.4.6 证明的 (a) 部分中证明级数 $\sum' F_n(z)$ 为 D 上解析函数且式 (19) 成立类似地, 证得级数

$$\sum_{n \geq 1} \left(\log\left(1 - \frac{s}{z_n}\right) + \frac{s}{z_n} \right)$$

为 D_1 上解析函数, 且

$$\left(\sum_{n \geq 1} \left(\log\left(1 - \frac{s}{z_n}\right) + \frac{s}{z_n} \right) \right)' = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{s - z_n} + \frac{1}{z_n} \right).$$

因此, 根据式 (35) 求导, 对于 $s \in D_1$, 可得

$$\begin{aligned} L'(s, \chi) \left(\frac{q}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}(s+\delta)} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) + \\ L(s, \chi) \frac{1}{2} \left(\log\left(\frac{q}{\pi}\right) \right) \left(\frac{q}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}(s+\delta)} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) \\ + L(s, \chi) \left(\frac{q}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}(s+\delta)} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma'\left(\frac{s+\delta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= \xi(s, \chi) \cdot \left(a + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{s - z_n} + \frac{1}{z_n} \right) \right),$$

再用 $\xi(s, \chi)$ 除等式两边即得(34)。

(b) 因为 $L(s, \chi)$ 在 $D(\chi)$ 上解析, 且当 $s \in D(\chi)$ 时 $L(s, \chi) \neq 0$, 所以 $L'(s, \chi)/L(s, \chi)$ 在 $D(\chi)$ 上解析。因此, 为证明(34) 当 $s \in D(\chi)$ 时成立, 根据解析开拓原理和已证明的结论, 即(34) 当 $s \in D_1$ 时成立, 我们仅需证明(34) 右端的函数是 $D(\chi)$ 上解析的。由定理 1.1.5 的(ii), 可知 $\Gamma'\left(\frac{1}{2}(s + \delta)\right)/\Gamma\left(\frac{1}{2}(s + \delta)\right)$ 在 $D(\chi)$ 上解析。我们要应用引理 1.3.4 证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha), F_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha - z_n} + \frac{1}{z_n},$$

在 $D(\chi)$ 中的任一点 α_0 处可导, 且

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha) \right)' \Big|_{\alpha=\alpha_0} = \sum_{n=1}^{\infty} F'_n(\alpha_0).$$

由于非常数的解析函数在任一有界区域内仅可能有有限个零点, 所以仅有有限个 z_i 满足 $|\alpha_0 - z_i| < 1$ 。因此我们有 $c_2 = \inf_{i \geq 1} |\alpha_0 - z_i| > 0$ 。令 $\delta = \min\left(\frac{1}{2}c_2, \frac{1}{2}\right)$ 。则当 $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ 时, 对 $\xi(s, \chi)$ 的任一零点 z_i , 都有

$$|\alpha - z_i| \geq |\alpha_0 - z_i| - |\alpha_0 - \alpha| \geq c_2 - \delta > 0,$$

因此 $\alpha \neq z_i, i \geq 1$ 。设 N 为充分大正整数, 使得当 $n \geq N$ 时 $|z_n| > 2|\alpha|$ 。则当 $M > N$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{N \leq n \leq M} |F_n(\alpha)| &\leq \sum_{N \leq n \leq M} \frac{|\alpha|}{|z_n(\alpha - z_n)|} \\ &\leq 2|\alpha| \cdot \sum_{n \geq N} |z_n|^{-2}, \end{aligned}$$

由此可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha)$ 在 $|\alpha - \alpha_0| < \delta$ 时绝对收敛。当 $0 <$

$|\delta_1| < \delta$ 时,我们有

$$\begin{aligned} |F_n(\alpha_0) - F_n(\alpha_0 + \delta_1)| &= \frac{|\delta_1|}{|(\alpha_0 - z_n)(\alpha_0 + \delta_1 - z_n)|} \\ &\leq \frac{2|\delta_1|}{|\alpha_0 - z_n|^2} \leq \frac{2\delta_1}{c_2^2}, \end{aligned}$$

这是因为 $|\alpha_0 + \delta_1 - z_n| \geq |z_n - \alpha_0| - \delta_1 \geq \frac{1}{2}|z_n - \alpha_0|$ 。设 m 为最小的满足 $|z_m| \geq 2|\alpha_0| + 1$ 的正整数。则当 $n \geq m$ 时,由

$$|\alpha_0 - z_n| \geq |z_n| - |\alpha_0| \geq \frac{1}{2}|z_n|,$$

$$|\alpha_0 + \delta_1 - z_n| \geq |z_n| - \delta - |\alpha_0| \geq \frac{1}{2}|z_n|,$$

还有

$$|F_n(\alpha_0) - F_n(\alpha_0 + \delta_1)| \leq \frac{4\delta_1}{|z_n|^2}.$$

又

$$|F'_n(\alpha_0)| = \frac{1}{(\alpha_0 - z_n)^2} \leq \begin{cases} c_2^{-2}, & \text{若 } n < m, \\ \frac{4}{|z_n|^2}, & \text{若 } n \geq m. \end{cases}$$

因此,由引理 1.3.4 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha)$ 在 $\alpha = \alpha_0$ 处可导。由于 α_0 是任意的 $D(\chi)$ 中的数,我们得知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} F_n(\alpha)$ 为 $D(\chi)$ 上的解析函数。于是(34)右端的函数在 $D(\chi)$ 上解析。由解析开拓就可知当 $s \in D(\chi)$ 时(34)总成立。

设 $D_2 = \{s | s \neq z_1, z_2, \dots, z_n, \dots\}$, D_2 是复 s 平面中的开连通集。应用定理 1.4.6,我们可与(34)类似地证明,当 $s \in D_2$ 时,

$$\frac{\xi'(s, \chi)}{\xi(s, \chi)} = a(\chi) + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{s - z_n} + \frac{1}{z_n} \right).$$

确切地说,令 $D_3 = \left\{ s \mid |s| < \frac{1}{2} |z_1| \right\}$, 则 $D_3 \subset D_2$ 。当 $s \in D_3$ 时,类似于(35),应用定理 1.4.6 我们有

$$\xi(s, \chi) = \exp \left(as + b + \sum_{n \geq 1} \left(\log \left(1 - \frac{s}{z_n} \right) + \frac{s}{z_n} \right) \right). \quad (36)$$

这里对数函数取主分支,即使得 $\log 1 = 0$ 。然后,可同样地证明,级数

$$\sum_{n \geq 1} \left(\log \left(1 - \frac{s}{z_n} \right) + \frac{s}{z_n} \right)$$

为 D_3 上解析函数,且

$$\left(\sum_{n \geq 1} \left(\log \left(1 - \frac{s}{z_n} \right) + \frac{s}{z_n} \right) \right)' = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{s - z_n} + \frac{1}{z_n} \right).$$

因此,在(36)两边对 s 可导,可得

$$\frac{\xi'(s, \chi)}{\xi(s, \chi)} = a(\chi) + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{s - z_n} + \frac{1}{z_n} \right). \quad (37)$$

虽然(37)是在 $s \in D_3$ 时证明的,但在(b)中实际上已证明(37)右边的级数是 D_2 上的解析函数,因此由解析开拓可知(37)在 D_2 上成立。由定理 1.3.5 的(i),对所有复数 s ,我们有

$$\xi(s, \chi) = \frac{\tau(\chi)}{i^{\delta}(\sqrt{q})} \xi(1 - s, \overline{\chi}). \quad (38)$$

两边对 s 求导可得

$$\xi'(s, \chi) = -\frac{\tau(\chi)}{i^{\delta}(\sqrt{q})} \xi'(1 - s, \overline{\chi}).$$

因此,当 $s \in D_2$ 时

$$\frac{\xi'(s, \chi)}{\xi(s, \chi)} = -\frac{\xi'(1 - s, \overline{\chi})}{\xi(1 - s, \overline{\chi})}. \quad (39)$$

由定理 1.3.5 的(i)中给出的 $\xi(z, \chi)$ 带有积分的表达式,容易验证有

$$\overline{\xi(\bar{z}, \bar{\chi})} = \xi(z, \chi). \quad (40)$$

由此出发,根据导数的定义可得

$$\overline{\xi'(\bar{s}, \bar{\chi})} = \xi'(s, \chi). \quad (41)$$

由(40)及(41)可得

$$\frac{\xi'(1-s, \bar{\chi})}{\xi(1-s, \bar{\chi})} = \overline{\left(\frac{\xi'(1-\bar{s}, \chi)}{\xi(1-\bar{s}, \chi)} \right)}, s \in D_2. \quad (42)$$

由(39)及(42)可得

$$\frac{\xi'(s, \chi)}{\xi(s, \chi)} = - \overline{\left(\frac{\xi'(1-\bar{s}, \chi)}{\xi(1-\bar{s}, \chi)} \right)}, s \in D_2. \quad (43)$$

令 $s = 0$, 可得 $(\bar{})$ 表示对括号内的复数取共轭)

$$\frac{\xi'(0, \chi)}{\xi(0, \chi)} = - \overline{\left(\frac{\xi'(1, \chi)}{\xi(1, \chi)} \right)}. \quad (44)$$

由(38)及(44),我们有

$$\begin{aligned} a(\chi) &= - \overline{\left(a(\chi) + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{1-z_n} + \frac{1}{z_n} \right) \right)} \\ &= - \overline{a(\chi)} - \overline{\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{1-z_n} + \frac{1}{z_n} \right)}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} 2\operatorname{Re}(a(\chi)) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z_n} + \frac{1}{z_n} \right) = - \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z_n} + \frac{1}{z_n} \right) \right) \\ &= - \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1-z_n} + \frac{1}{z_n} \right) \right) \\ &= - \operatorname{Re} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{1-z_n} + \frac{1}{z_n} \right) \right) \right). \quad (45) \end{aligned}$$

因为(注意: $\operatorname{Re}(1-z_i)^{-1} \geq 0, \operatorname{Re} z_i^{-1} \geq 0, i \geq 1$)

$$\begin{aligned} 0 &\leq \operatorname{Re} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^M \left(\frac{1}{1-z_n} + \frac{1}{z_n} \right) \right) \right) - \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{1-z_n} + \frac{1}{z_n} \right) \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{n > M} \left(\frac{1}{1-z_n} + \frac{1}{z_n} \right) \right) \leq \sum_{n > M} \frac{1}{|(1-z_n)z_n|}, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{1-z_n} + \frac{1}{z_n} \right) \right) \right) &= \lim_{M \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^M \left(\frac{1}{1-z_n} + \frac{1}{z_n} \right) \right) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^M \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-\bar{z}_n} \right) + \sum_{n=1}^M \operatorname{Re} \frac{1}{z_n} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-\bar{z}_n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z_n} \right); \end{aligned} \quad (46)$$

这里我们注意到两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-\bar{z}_n} \right) \text{ 及 } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z_n} \right)$$

都是绝对收敛的,这是因为

$$0 \leq \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1-\bar{z}_n} \right) \leq \frac{1}{|1-\bar{z}_n|^2}, \quad 0 \leq \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z_n} \right) \leq \frac{1}{|z_n|^2},$$

而 $\sum_{n \geq 1} |z_n|^{-2} < \infty$ 。为说明这两个级数收敛于同一个值,我们指

出: $1-\bar{z}_1, 1-\bar{z}_2, \dots$, 是 z_1, z_2, \dots , 的一个适当排列。首先, 由(37)可知, 每个 $1-\bar{z}_i$ 都是 $\xi(s, \chi)$ 的根, 而若 z_j 是一个根, 则由于 $1-\bar{z}_j$ 也是根, 所以 $1-\bar{z}_j = z_k$, 从而 $z_j = 1-\bar{z}_k$ 。因此, 排列 $1-\bar{z}_1, 1-\bar{z}_2, \dots$ 中包含 $\xi(s, \chi)$ 所有的根。我们要进一步说明的是, 若 z 为 $\xi(s, \chi)$ 的 h 阶零点, 则 $1-\bar{z}$ 也为 $\xi(s, \chi)$ 的 h 重零点。这可通过在(38)两边连续求 1 至 h 阶导数而得证, 因为 s_0 是 $\xi(s, \chi)$ 的 h 阶零点的判断准则是

$$\xi(s_0, \chi) = \xi'(s_0, \chi) = \dots = \xi^{(h-1)}(s_0, \chi) = 0,$$

$$\xi^{(h)}(s_0, \chi) \neq 0,$$

这里 $\xi^{(i)}(s, \chi)$ 为 $\xi(s, \chi)$ 的 i 阶导函数。由此, 我们断言: 若 z 为 $\xi(s, \chi)$ 的一个 h 阶零点, 则 z 在序列

$$1-\bar{z}_1, 1-\bar{z}_2, \dots, 1-\bar{z}_n, \dots,$$

中恰好重复出现 h 次。这是因为, $1-\bar{z}$ 也是 $\xi(s, \chi)$ 的一个 h 阶零

点,因此,它在序列

$$z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$$

中重复出现恰好 h 次。这就证明了序列 $1 - \bar{z}, 1 - \bar{z}_2, \dots$, 是序列 z_1, z_2, \dots , 是一个重排。这样, 对任意充分大的正数 M , 既有

$$\sum_{n \leq M} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \bar{z}_n} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z_n} \right),$$

又有

$$\sum_{n \leq M} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z_n} \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \bar{z}_n} \right).$$

由此, 若令 $M \rightarrow \infty$, 则得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{1 - \bar{z}_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z_n} \right).$$

由(45)及(46), 就得到

$$\operatorname{Re}(a(\chi)) = - \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{z_n} \right).$$

证毕。

关于定理 1.3.5 的(ii)中的引入的整函数 $\xi(s)$, 我们有

定理 1.4.8 (i) $\xi(s)$ 是一阶整函数。

(ii) $\xi(s)$ 有可列无穷多个零点 ρ , 它们都满足 $0 \leq \operatorname{Re} \rho \leq 1$, $\rho \neq 0, 1$, 并且可按绝对值增长的一种排列, 将这些零点排列为 $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \dots$, 即 $|\rho_1| \leq |\rho_2| \leq \dots \leq |\rho_n| \leq \dots$, 其中每个零点是几阶的就重复排列几次。对任给 $\epsilon > 0$, $\sum_{n \geq 1} |\rho_n|^{-1-\epsilon} < \infty$ 。

ρ_1, ρ_2, \dots , 就是 $\zeta(s)$ 的全部非平凡零点。

(iii) $\xi(s)$ 有无穷乘积展开, 即

$$\xi(s) = e^{As+B} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{\rho_n} \right) e^{s/\rho_n},$$

这里 A 与 B 为绝对常数, 无穷乘积的值定义为

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \prod_{|\rho_n| \leq x} \left(1 - \frac{s}{\rho_n}\right) e^{s/\rho_n}.$$

证明: (i) 可与引理 1.4.1 类似地加以证明。

应用(i), 定理 1.1.5, 定理 1.3.5 的(ii), 引理 1.4.2, 引理 1.4.3, 以及解析开拓原理, (ii) 可与引理 1.4.5 类似地证明。

应用(i), (ii), 引理 1.3.4, 引理 1.4.2, 解析函数的最大模原理, 引理 1.4.3, 可与定理 1.4.6 类似地证明(iii)。

证毕。

由定理 1.4.8 可得

推论 1.4.9 令 $D = \{s \mid s \neq 1, -2, -4, -6, \dots, \rho_1, \rho_2, \dots, i\}$, 其中 $-2, -4, -6, \dots$ 为 $\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)$ 的全部极点, 也为 $\zeta(s)$ 的全部平凡零点, 1 为 $\zeta(s)$ 的唯一极点, ρ_1, ρ_2, \dots 为 $\xi(s)$ 的全部零点, 也即 $\zeta(s)$ 的全部非平凡零点, 它们满足

$$\rho_i \neq 1, 0 \leq \operatorname{Re} \rho_i \leq 1, 0 < |\rho_1| \leq |\rho_2| \leq \dots,$$

且对任给 $\varepsilon > 0$, $\sum_{n \geq 1} |\rho_n|^{-1-\varepsilon} < \infty$ 。D 为一个开连通集, 且当 $s \in D$ 时,

$$\begin{aligned} \frac{\xi'(s)}{\xi(s)} &= \frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{s-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)} + A \\ &\quad + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{s - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right), \end{aligned} \quad (47)$$

其中 $A = \frac{\xi'(0)}{\xi(0)} - \frac{1}{2} \log \pi + \frac{1}{2} \Gamma'(1) - 1$ 。

证明: 可以用由定理 1.4.6 导出推论 1.4.7 的类似方法, 应用定理 1.3.5 的(ii)、定理 1.4.8、引理 1.3.4、定理 1.1.5 以及解析开拓原理证明(47)。至于 A 的值, 在(47)中取 $s = 0$ 即可得到。**证毕。**

练 习

(I) 若 χ 是模 q 的非主特征, 它是由模 q_1 的原特征 χ_1 诱导出的, $q_1 | q$, 证明

$$L(s, \chi) = L(s, \chi_1) \prod_{\substack{p|q \\ p \nmid q_1}} (1 - \chi_1(p)p^{-s}).$$

由此并应用 § 1.4 的(6), 证明存在无穷多个满足 $p \equiv 1 \pmod{q}$ 的素数 p 。

(II) 设 $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ 是 $\xi(s, \chi)$ 全部零点的一个排列, $|z_1| \leq |z_2| \leq \dots \leq |z_n| \leq \dots$, 证明

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \prod_{|z_n| \leq x} \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{z}{z_n}\right) e^{z/z_n}.$$

(III) 若 $q \geq 3$, χ 为模 q 的实原特征, $\chi(-1) = -1$, 应用函数方程(定理 1.3.5) 及定理 1.4.4, 证明 $L(0, \chi) > 0$ 。

§ 1.5 L 函数的零点分布

在本节中 c_1, c_2, \dots 将代表一些正的绝对常数。由 § 1.4 的(33), 我们知道

$$-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)\chi(n)}{n^s}, \operatorname{Re} s > 1, \quad (1)$$

其中 χ 为模 q 的任一特征。当 χ 为原特征时, 在推论 1.4.7 中, 我们获得了用 $L(s, \chi)$ 的可列无穷多个非平凡零点所作的 $L'(s, \chi)/L(s, \chi)$ 的无穷级数表达式。但 $L(s, \chi)$ 的非平凡零点是怎样分布的? 由引理 1.4.4, 我们知道 $L(1, \chi) \neq 0$ 。由此可得: 存在 δ

$> 0, \delta$ 依赖于 q , 使得当 $|s - 1| < \delta$ 时, $L(s, \chi) \neq 0$ 。因此, 若 $s = \sigma + it$, 则在 σ 与 1 很近, 且 $|t|$ 很小时, $L(s, \chi) \neq 0$ 。但这个结果的价值是很小的, 因为 δ 究竟是多大的一个量我们是不知道的, 且我们知道随着 $|t|$ 充分地大, $L(s, \chi)$ 的零点 $s = \sigma + it$ 的个数才会任意地多, 因此, 若要求 $|t| < \delta$, 就对于 $L(s, \chi)$ 的零点所知甚少。这里要证明: 对 $L(s, \chi)$ 的每个零点 $\rho = \beta + it$, 差 $1 - \beta$ 都有一个定量的下界, 这个下界与 q 及 t 有关。先证明一个引理。

引理 1.5.1 (i) 设 χ 为模 q 的非主特征, χ_1 为模 q_1 的原特征, χ_1 诱导出 χ , 即 $\chi = \chi \chi_0$, χ_0 为模 q 的主特征。则当 $\text{Res} = \sigma > 1$ 时

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \frac{L'(s, \chi_1)}{L(s, \chi_1)} + 2\theta_1 \log q, |\theta_1| \leq 1.$$

(ii) 设 χ_0 为模 q 的主特征, $\text{Res} = \sigma > 1$, 则

$$\frac{L'(s, \chi_0)}{L(s, \chi_0)} = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + 2\theta_2 \log q, |\theta_2| \leq 1.$$

(iii) 设 χ 为模 q 的任一特征, $\sigma > 1, t$ 为任意实数, 则

$$\begin{aligned} 3\left(-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)}\right) + 4\text{Re}\left(-\frac{L'(\sigma + it, \chi)}{L(\sigma + it, \chi)}\right) \\ + \text{Re}\left(-\frac{L'(\sigma + 2it, \chi^2)}{L(\sigma + 2it, \chi^2)}\right) \geq 0. \quad (2) \end{aligned}$$

(iv) 设 $s = \sigma + it, \sigma \in (1, 2), t$ 为实数, 则

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} + O(\log(|t| + 2)).$$

(v) 设 χ 为模 q 的原特征, $s = \sigma + it, \sigma \in (1, 2), t$ 为实数, $\beta + it$ 为 $L(z, \chi)$ 的一个非平凡的零点, 则

$$\text{Re}\left(-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)}\right) \leq -\frac{1}{\sigma - \beta} + O(\log(q(|t| + 2))).$$

(vi) 设 χ 为模 q 的任一非主特征, $s = \sigma + it$, $\sigma \in (1, 2)$, t 为实数, 则

$$\operatorname{Re}\left(-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)}\right) \leq c_1 \log(q(|t| + 2)).$$

证明: (i) 当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时, 由无穷乘积表达式可得

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= L(s, \chi_1) \prod_{\substack{p|q \\ p \nmid q_1}} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right) \\ &= L(s, \chi_1) \exp\left(\sum_{\substack{p|q \\ p \nmid q_1}} \log(1 - \chi_1(p)p^{-s})\right), \end{aligned}$$

这里对数函数取主分支。据此, 对 s 求导可得

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \frac{L'(s, \chi_1)}{L(s, \chi_1)} + \prod_{\substack{p|q \\ p \nmid q_1}} \frac{\chi_1(p) \log p}{p^s - \chi_1(p)}.$$

因为

$$\left| \sum_{\substack{p|q \\ p \nmid q_1}} \frac{\chi_1(p) \log p}{p^s - \chi_1(p)} \right| \leq \sum_{\substack{p|q \\ p \nmid q_1}} \frac{\log p}{p - 1} \leq 2 \sum_{p|q} \log p \leq 2 \log q,$$

(i) 得证。

(ii) 应用

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p|q} (1 - p^{-s}), \operatorname{Re} s > 1,$$

可与(i)类似地证明(ii)。

(iii) 与(1)类似地可证明

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \operatorname{Re} s > 1.$$

因此, 由(1)可知(2)式的左边为(注意: 由级数绝对收敛, 可知和的实部等于实部的和, 即“Re”与 \sum_n 可交换)

$$\sum_{n=1}^m (3 + 4\operatorname{Re}\omega(n) + \operatorname{Re}(\omega(n))^2) \Lambda(n) n^{-\sigma},$$

这里 $\omega(n) = \chi(n)n^{-it}$ 。若设 $\omega(n) = e^{i\theta}$, 则

$$\begin{aligned} 3 + 4\operatorname{Re}\omega(n) + \operatorname{Re}(\omega(n))^2 &= 3 + 4\cos\theta + \cos 2\theta \\ &= 2(\cos\theta + 1)^2 \geq 0, \end{aligned}$$

所以(iii) 成立。

(iv) 由推论 1.4.9 可得

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}g(s) + O(1), g(s) = \frac{\Gamma'\left(\frac{s}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2} + 1\right)}.$$

若 $|t| \leq 2$, 则由于函数 $g(s)$ 在闭集 $\{s | s = \sigma + it, 1 \leq \sigma \leq 3, |t| \leq 1\}$ 中连续, $g(s) = O(1)$ 。若 $|t| > 2$, 由定理 1.1.5 的(v) 可得

$$g(s) = O(\log(|t| + 2)).$$

(iv) 得证。

(v) 由推论 1.4.7, 我们有

$$\begin{aligned} -\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} &= \frac{1}{2}g(s, \chi) - a(\chi) + O(\log q) \\ &\quad - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{s - z_n} + \frac{1}{z_n} \right), \end{aligned}$$

其中 $g(s, \chi) = \Gamma'\left(\frac{1}{2}(s + \delta)\right) / \Gamma\left(\frac{1}{2}(s + \delta)\right)$ 。可与(iv) 的证明中估计 $g(s)$ 类似地得

$$g(s, \chi) = O(\log(|t| + 2)).$$

因此, 我们有(参见 § 1.4 的(46) 式中的推导)

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(-\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)}\right) &= -\operatorname{Re}(a(\chi)) - \operatorname{Re}\left(\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{s - z_n} + \frac{1}{z_n}\right)\right) \\ &\quad + O(\log(q(|t| + 2))) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z_n}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{s - z_n} + \frac{1}{z_n}\right) \end{aligned}$$

$$+ O(\log(q(|t| + 2))) \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s - z_n} \right) + O(\log(q(|t| + 2))). \quad (3)$$

由于对每个 n 都有 $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{s - z_n} \right) \geq 0$, 特别地, 若设 $z_k = \beta + it$, 则因为 $s = \sigma + it$, 由(3) 可得

$$\operatorname{Re} \left(- \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right) \leq - \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s - z_k} \right) + O(\log(q(|t| + 2))) \\ = - \frac{1}{\sigma - \beta} + O(\log(q(|t| + 2))).$$

(iv) 证毕。

(vi) 设 χ 是 χ_1 诱导的, χ_1 为模 q_1 的原特征, $q_1 | q, q_1 \geq 3$ 。由(1) 和(3) 式立即可知(vi) 成立。

引理证毕。

关于 L 函数的零点分布, 我们有

定理 1.5.2 设 $Q \geq 3$, 则存在 $c_2 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, 使得整函数

$$G(s) = \prod_{3 \leq q \leq Q} \prod_{\chi \bmod q}^* L(s, \chi)$$

仅可能有一个零点 $\rho = \beta + it$, 满足 $0 \leq \beta \leq 1, \rho \neq 0, 1$, 以及

$$1 - \beta \leq \frac{c_2}{\log(Q(|t| + 2))}, \quad (4)$$

这里 $\prod_{\chi \bmod q}^*$ 表示对模 q 所有的原特征求积。并且, 当这个零点存在时, 它是 $G(s)$ 的实的单阶零点, 我们记之为 $\tilde{\beta}$, 它使得 $L(\tilde{\beta}, \tilde{\chi}) = 0$ 对某个模 \tilde{q} 的实原特征 $\tilde{\chi}$ 成立, $3 \leq \tilde{q} \leq Q$ 。于是, 三元组 $(\tilde{q}, \tilde{\chi}, \tilde{\beta})$ 或不存在, 或对所有的模 $q (3 \leq q \leq Q)$ 、模 q 的所有原特征 χ , 以及 $L(s, \chi)$ 的所有非平凡零点 ρ 所组成的三元组 (q, χ, ρ) 而言是唯一的, 即若 $(\tilde{q}, \tilde{\chi}, \tilde{\beta})$ 不存在, 或虽存在, 但

$(q, \chi, \rho) \neq (\tilde{q}, \tilde{\chi}, \tilde{\beta})$, 则有

$$\rho = \beta + it, 1 - \beta > \frac{c_2}{\log(Q(|t| + 2))}. \quad (5)$$

我们称这个三元组 $(\tilde{q}, \tilde{\chi}, \tilde{\beta})$ 为 Q -例外组, $(\tilde{q}, \tilde{\chi})$ 为 Q -例外对, \tilde{q} 为 Q 例外模, $\tilde{\chi}$ 为 Q -例外特征, 而 $\tilde{\beta}$ 则为 Q -例外零点。

定理 1.5.2 的证明实际上由几个引理组成。以下 $c_i (i \geq 3)$ 表示若干正绝对常数。

引理 1.5.3 设 $q \geq 3, \chi$ 为模 q 的一个复的原特征, $\rho = \beta + it$ 为 $L(s, \chi)$ 的一个非平凡零点, 则

$$1 - \beta > \frac{c_3}{\log(q(|t| + 2))}.$$

证明: 设 $\sigma \in (1, 2)$, 简记 $\log(q(|t| + 2)) = L$ 。由引理 1.5.1 的 (iii), (iv), (v) 和 (vi), 可得

$$\frac{3}{\sigma - 1} - \frac{4}{\sigma - \beta} + c_4 L \geq 0.$$

令 $\sigma = \min(1 + c_5 L^{-1}, 2)$, $c_5 = \min\left(\frac{1}{2} c_4^{-1}, \frac{1}{10}\right)$, 则由

$$\frac{1}{\sigma - 1} \leq c_5^{-1} L_1 + 1 < (c_5^{-1} + 1)L,$$

可得

$$1 - \beta > \frac{c_3}{L}, c_3 = (5(33 + 7c_4))^{-1}.$$

证毕。

引理 1.5.4 设 $q \geq 3, \chi$ 为模 q 的一个实原特征, $\rho = \beta + it$ 为 $L(s, \chi)$ 的一个非平凡零点, $t \neq 0$, 则

$$1 - \beta > \frac{c_6}{\log(q(|t| + 2))}.$$

证明: 这时 $\chi^2 = \chi_0$ 。设 $\sigma \in (1, 2)$ 。简记 $\log(q(|t| + 2)) =$

L 。则由引理 1.5.1 的(ii), (iii) 和(iv) 可得

$$\begin{aligned} & \frac{3}{\sigma-1} + \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\sigma+2it-1}\right) + \\ & 4\operatorname{Re}\left(-\frac{L'(\sigma+it, \chi)}{L(\sigma+it, \chi)}\right) + c_7 L \geq 0. \end{aligned} \quad (6)$$

显然

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\sigma+2it-1}\right) = \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+4t^2}. \quad (7)$$

由 $\xi(\bar{\rho}, \bar{\chi}) = \xi(\bar{\rho}, \chi) = \overline{\xi(\rho, \chi)} = 0$, 可知 $\bar{\rho}$ 也为 $\xi(s, \chi)$ 的零点, 即为 $L(s, \chi)$ 的非平凡零点, 且 $\bar{\rho} \neq \rho$ 。因此, 由(3) 可知

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left(-\frac{L'(\sigma+it, \chi)}{L(\sigma+it, \chi)}\right) & \leq -\frac{1}{\sigma-\beta} - \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\sigma+it-\beta+it}\right) + O(L) \\ & = -\frac{1}{\sigma-\beta} - \frac{\sigma-\beta}{(\sigma-\beta)^2+4t^2} + O(L). \end{aligned} \quad (8)$$

由(6), (7) 及(8) 可得

$$\begin{aligned} & \frac{3}{\sigma-1} - \frac{4}{\sigma-\beta} - \frac{4(\sigma-\beta)}{(\sigma-\beta)^2+4t^2} \\ & + \frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+4t^2} + \tilde{c}_7 L \geq 0. \end{aligned} \quad (9)$$

取 $\sigma = \min(1+c_8 L^{-1}, 2)$, $c_8 = \min\left(\frac{1}{3}\tilde{c}_7^{-1}, \frac{1}{35}\right)$ 。因此, 当 $|t| \geq$

$\frac{1}{2}(\sigma-1)$ 时, 由(9) 及

$$\frac{\sigma-1}{(\sigma-1)^2+4t^2} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sigma-1},$$

我们得

$$\begin{aligned} & \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{\sigma-1} - \frac{4}{\sigma-\beta} + \tilde{c}_7 L > 0, \\ & 1-\beta > \left(15\left(\frac{7}{2}\tilde{c}_8^{-1} + \tilde{c}_7 + 3.5\right)\right)^{-1} L^{-1}. \end{aligned} \quad (10)$$

当 $0 < |t| < \frac{1}{2}(\sigma - 1) < \frac{1}{2}(\sigma - \beta)$ 时, 由(9) 以及

$$-\frac{4(\sigma - \beta)}{(\sigma - \beta)^2 + 4t^2} < -\frac{2}{\sigma - \beta},$$

$$\frac{\sigma - 1}{(\sigma - 1)^2 + 4t^2} < \frac{1}{\sigma - 1},$$

我们又得

$$\frac{4}{\sigma - 1} - \frac{6}{\sigma - \beta} + \tilde{c}_7 L > 0,$$

从而有

$$1 - \beta > \frac{163}{105}(4c_8^{-1} + \tilde{c}_7 + 4)^{-1} L^{-1}. \quad (11)$$

由(10) 及(11) 可得所需结论。证毕。

引理 1.5.5 设 $q \geq 3$, χ 为模 q 的任一实原特征, $L(s, \chi)$ 有实根 β_1 与 β_2 , $\beta_1 \neq \beta_2$, $0 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 1$, 则有

$$1 - \min(\beta_1, \beta_2) > \frac{c_9}{\log q}.$$

证明: 当 $\sigma \in (1, 2)$ 时, 我们有不等式:

$$\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)} = \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) n^{-\sigma} (1 + \chi(n)) \geq 0. \quad (12)$$

应用引理 1.5.1 的(iv) 以及(3) 式, 我们有

$$-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} = \frac{1}{\sigma - 1} + O(1),$$

$$-\frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)} \leq -\frac{1}{\sigma - \beta_1} - \frac{1}{\sigma - \beta_2} + O(\log q)$$

$$\leq -\frac{2}{\sigma - \beta} + O(\log q),$$

其中 $\beta = \min(\beta_1, \beta_2)$ 。因此由(12) 得

$$\frac{1}{\sigma - 1} - \frac{2}{\sigma - \beta} + c_{10} \log q \geq 0.$$

取 $\sigma = \min(1 + c_{11}(\log q)^{-1}, 2)$, $c_{11} = \min\left(\frac{1}{2}c_{10}^{-1}, \frac{1}{3}\right)$, 我们得(应用 $\log q \geq 1$)

$$1 - \beta > c_9(\log q)^{-1}, \quad c_9 = (6(c_{11}^{-1} + c_{10} + 1))^{-1}.$$

证毕。

引理 1.5.6 设 $q \geq 3$, χ 为模 q 的一个实原特征, $L(s, \chi)$ 以实数 β 为阶数 ≥ 2 的非平凡零点, 则

$$1 - \beta > \frac{c_{12}}{\log q}.$$

证明: 这可与引理 1.5.5 类似地证明, 即仍在 $\sigma \in (1, 2)$ 时应用(12)。只需注意到, 这时由(3)式我们有

$$-\frac{L'(\sigma, \chi)}{L(\sigma, \chi)} \leq -\frac{2}{\sigma - \beta} + O(\log q);$$

这是因为, 若设 β 为 h 阶非平凡零点, 则 $-\frac{1}{\sigma - \beta}$ 一项在(3)式右端的无穷级数中恰好被重复叠加了 h 次。证毕。

引理 1.5.7 若 χ_i 为模 q_i 的实原特征, $3 \leq q_i \leq Q$, $i = 1, 2$, $L(s, \chi_i)$ 以 β_i 为非平凡实零点, 且 $\chi_1 \neq \chi_2$, 则

$$1 - \min(\beta_1, \beta_2) > \frac{c_{13}}{\log Q}.$$

证明: 由 § 1.2 可知 $\chi_1 \chi_2$ 可视为模 $[q_1, q_2]$ 的特征, 而由定理 1.2.2 的(vi)可知 $\chi_1 \chi_2$ 不为主特征。设 $\sigma \in (1, 2)$ 。我们有不等式:

$$\begin{aligned} & -\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} - \frac{L'(\sigma, \chi_1)}{L(\sigma, \chi_1)} - \frac{L'(\sigma, \chi_2)}{L(\sigma, \chi_2)} - \frac{L'(\sigma, \chi_1 \chi_2)}{L(\sigma, \chi_1 \chi_2)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)(1 + \chi_1(n) + \chi_2(n) + \chi_1(n)\chi_2(n))n^{-\sigma} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n)(1 + \chi_1(n))(1 + \chi_2(n))n^{-\sigma} \geq 0. \end{aligned}$$

由引理 1.5.1 的(iv), (v) 及(vi), 我们得

$$\begin{aligned}
-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} &= \frac{1}{\sigma-1} + O(1), \\
-\frac{L'(\sigma, \chi_i)}{L(\sigma, \chi_i)} &\leq -\frac{1}{\sigma-\beta_i} + O(\log Q), i = 1, 2, \\
-\frac{L'(\sigma, \chi_1 \chi_2)}{L(\sigma, \chi_1 \chi_2)} &\leq c_1 \log(2Q).
\end{aligned}$$

因此, 我们得到

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sigma-1} - \frac{1}{\sigma-\beta_1} - \frac{1}{\sigma-\beta_2} + c_{14} \log Q &\geq 0, \\
\frac{1}{\sigma-1} - \frac{2}{\sigma - \min(\beta_1, \beta_2)} + c_{14} \log Q &> 0.
\end{aligned}$$

取 $\sigma = \min(1 + c_{15}(\log Q)^{-1}, 2)$, $c_{15} = \min\left(\frac{1}{3} c_{14}^{-1}, \frac{1}{3}\right)$, 则由

$$\frac{1}{\sigma-1} \leq c_{15}^{-1} \log Q + 1 < (c_{15}^{-1} + 1) \log Q,$$

可得

$$1 - \beta > c_{13}(\log Q)^{-1}, c_{13} = (3(1 + c_{14} + c_{15}^{-1}))^{-1}.$$

证毕。

定理 1.5.2 的证明: 令 $c_2 = \min(c_3, c_6, c_9, c_{12}, c_{13}, \frac{1}{2})$ 。设 $\rho = \beta + it$ 为 $G(s)$ 的一个根, $0 \leq \beta \leq 1, t$ 为实数, $\rho \neq 0, 1$, 则 $L(\rho, \chi) = 0$, 这里对某个 q, χ 为模 q 的某原特征, $3 \leq q \leq Q$ 。若 ρ 不是实的或 χ 不是实的, 则由引理 1.5.3 和引理 1.5.4, 可知(5)成立。设 ρ 是实的, $\rho = \beta$, 且 χ 是实的。若 β 为 $G(s)$ 的阶数 ≥ 2 的零点, 则不外乎出现两种情况:

- (i) β 为 $L(s, \chi)$ 的阶数 ≥ 2 的实零点;
- (ii) β 为 $L(s, \chi)$ 的 1 阶实零点, 又为某个 $L(s, \chi_1)$ 的实零点, $\chi \neq \chi_1, \chi_1$ 为模 q_1 的某个原特征。

对于情况(i), 由引理 1.5.6 可知(5)成立, 对于情况(ii), 按

χ_1 是复的或实的, 分别应用引理 1.5.3 和引理 1.5.7, 可知(5) 式成立. 因此, 我们的讨论证明了: 若 ρ 为 $G(s)$ 的零点, $0 \leq \operatorname{Re} \rho \leq 1$, $\rho \neq 0, 1$, $\rho = \beta + it$ 满足(4) 式, 则 ρ 只可能是 $G(s)$ 的 1 阶实零点, $\rho = \beta$, 且相应的使得 $L(\rho, \chi) = 0$ 的模 q ($3 \leq q \leq Q$) 的原特征 χ 为实原特征. 进一步应用引理 1.5.5 和引理 1.5.7, 我们还知道 $G(s)$ 仅可能有一个满足(4) 式的 1 阶实零点. 这就完成了定理 1.5.2 的证明.

对于 $\zeta(s)$, 我们有

定理 1.5.8 若 $\rho = \beta + it$ 为 $\zeta(s)$ 的任意一个非平凡零点, 则

$$1 - \beta > \frac{c_{16}}{\log(|t| + 2)}.$$

为证明定理 1.5.8, 先证明一个引理.

引理 1.5.9 当 $0 \leq \sigma \leq 1$ 以及

$$|t| < \sqrt{\left(2\left((\pi e^\pi)^{-1} + \left(\frac{15}{4}\pi^2 e^{\frac{5}{2}\pi}\right)^{-1}\right)\right)^{-1} - 1}$$

时(t 为实数), $\zeta(\sigma + it) \neq 0$.

证明: 由定理 1.3.5 的(ii), 我们仅需证明 $\xi(\sigma + it) \neq 0$. 设 $s = \sigma + it$. 我们有

$$\begin{aligned} |\xi(\sigma + it)| &\geq 1 - |s(s-1)| \\ &\quad \cdot \int_1^\infty (2u^{-\frac{1}{2}}) \left(\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 u} \right) du. \end{aligned} \quad (13)$$

因为

$$\sum_{n=1}^\infty e^{-\pi n^2 u} = e^{-\pi u} \left(1 + \sum_{n \geq 2} e^{-\pi(n^2-1)u} \right),$$

而当 $n \geq 2$ 时, $n^2 - 1 \geq \frac{3}{2}n$, 所以

$$\sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 u} \leq e^{-\pi u} \left(1 + \sum_{n \geq 2} e^{-\frac{3}{2}\pi n u} \right) = e^{-\pi u} \left(1 + \frac{e^{-\frac{3}{2}\pi u}}{1 - e^{-\frac{3}{2}\pi u}} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\pi u} \left(1 + \frac{e^{-\frac{3}{2}\pi u}}{e^{(3\pi u)/2} - 1} \right) \leq e^{-\pi u} \left(1 + e^{(3\pi u)/2} \left(\frac{3}{2}\pi u \right)^{-1} \right), \\
\int_1^\infty (2u^{-\frac{1}{2}}) \left(\sum_{n \geq 1} e^{-\pi n^2 u} \right) du &\leq 2 \int_1^\infty \left(e^{-\pi u} + \frac{2}{3\pi} e^{-(5\pi u)/2} \right) du \\
&\leq 2 \left((\pi e^\pi)^{-1} + \frac{4}{15\pi^2} e^{-(5\pi)/2} \right).
\end{aligned}$$

因此,由(13)以及 $|s(s-1)| \leq t^2 + 1$,可得引理 1.5.9.证毕。

定理 1.5.8 的证明: 设 $\rho = \beta + it$ 为 $\zeta(s)$ 的一个非平凡零点, $0 \leq \beta \leq 1$, t 为实数, 且 $|t| \geq 1$ 。设 $\sigma \in (1, 2)$, 与引理 1.5.1 的 (iii) 类似地, 可得

$$\begin{aligned}
&3 \left(-\frac{\zeta'(\sigma)}{\zeta(\sigma)} \right) + 4 \operatorname{Re} \left(-\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right) \\
&\quad + \operatorname{Re} \left(-\frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} \right) \geq 0. \quad (14)
\end{aligned}$$

简记 $L = \log(|t| + 2)$ 。应用推论 1.4.9, 可与引理 1.5.1 的 (iv) 与 (v) 类似地证得 (参见 (3) 式的推导, 注意: $\operatorname{Re}((\sigma + it - \rho_n)^{-1}) \geq 0, \operatorname{Re} \rho_n^{-1} \geq 0$)

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re} \left(-\frac{\zeta'(\sigma + it)}{\zeta(\sigma + it)} \right) &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sigma + it - 1} \right) + O(L) \\
&\quad - \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sigma + it - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) \right) \\
&\leq -\frac{1}{\sigma - \beta} + O(L), \quad (15)
\end{aligned}$$

$$\operatorname{Re} \left(-\frac{\zeta'(\sigma + 2it)}{\zeta(\sigma + 2it)} \right) \leq \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\sigma + 2it - 1} \right) + O(L) = O(L). \quad (16)$$

因此,由引理 1.5.1 的 (iv), (14), (15) 及 (16), 可得

$$\frac{3}{\sigma - 1} - \frac{4}{\sigma - \beta} + c_{17}L \geq 0. \quad (17)$$

取 $\sigma = \min(1 + c_{18}L^{-1}, 2)$, $c_{18} = \min\left(\frac{1}{2}c_{17}^{-1}, \frac{1}{12}\right)$, 则由

$$\frac{1}{\sigma-1} \leq c_{18}^{-1} L + 1 < (c_{18}^{-1} + 1) L$$

及(17) 可得

$$1 - \beta > c_{16} L^{-1}, c_{16} = (4(c_{17} + 3c_{18}^{-1} + 3))^{-1}.$$

若 $|t| < 1$, 则由于

$$\sqrt{\left(2\left((\pi e^{\pi})^{-1} + \left(\frac{15}{4}\pi^2 e^{\frac{5}{2}\pi}\right)^{-1}\right)\right)^{-1} - 1} > 1,$$

由引理 1.5.9 可知 $\zeta(\beta + it) \neq 0$. 证毕。

根据定理 1.5.2, 我们知道整函数 $G(s)$ 有可能存在唯一的实零点 $\tilde{\beta}$, 它满足 $L(\tilde{\beta}, \tilde{\chi}) = 0$, χ 为模 \tilde{q} 的一个实原特征, $3 \leq \tilde{q} \leq Q$, 以及 $1 - \tilde{\beta} \leq c_2 / \log(2Q)$, 即 $\tilde{\beta}$ 与 1 的距离“比较近”, 并且, 定理 1.5.2 的证明方法无法给出差 $1 - \tilde{\beta}$ 一个适当的下界估计. 这个 $\tilde{\beta}$ 通常被称做“例外零点”, 它实际上是依赖于 Q 的. 在本节的最后部分, 我们将引进一种方法, 用以给出 $1 - \tilde{\beta}$ 的非平凡下界。

我们继续探讨 L 函数非平凡零点的性质. 我们有

定理 1.5.10 设 T 为实数, χ 为模 q 的原特征, $q \geq 3$, $\rho_n = \beta_n + ir_n$, $n = 1, 2, \dots$, 为 $\xi(s, \chi)$ 所有的零点, 也即 $L(s, \chi)$ 所有的非平凡零点, 且 $|\rho_1| \leq |\rho_2| \leq \dots$. 则有

$$(i) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + (T - r_n)^2} \leq c_{26} \log(q(|T| + 2)).$$

$$(ii) \sum_{|T - r_n| \geq 1} |T - r_n|^{-2} \leq 2c_{26} \log(q(|t| + 2)).$$

(iii)(a) 对任意的 T_1 , $T_1 \geq 0$, 满足 $T_1 \leq |r_n| \leq T_1 + 1$ 的零点 $\rho_n = \beta_n + ir_n$ 的个数 $\leq 4c_{26} \log(q(T_1 + 2))$.

(b) 设 $T \geq 2$, 则满足 $|r_n| \leq T$ 的零点个数为 $O(T \log(qT))$.

(iv) 可以找到一个数 T' , $T \leq T' \leq T + 1$, 使得

$$|T' - r_n| \geq \frac{c_{27}}{\log(q(|T| + 2))}$$

对所有非平凡零点 $\rho_n = \beta_n + ir_n$ 成立。

(v) 若 $z = \beta + it$, $-2 \leq \beta \leq 3$, z 不与任一 ρ_n 相等, 且 $|t| \geq \mu_1 > 0$, 或 $0 < \mu_2 \leq |\beta| \leq \mu_3 < 2$, 或 $\beta \geq 1$, μ_i 为常数, 则

$$\frac{L'(z, \chi)}{L(z, \chi)} = \sum_{|t-r_n| < 1} \frac{1}{z - \rho_n} + O(\log(q(|t| + 2))),$$

其中求和通过所有满足 $|t - r_n| < 1$ 的 ($\ll \log(q(|t| + 2))$) 个非平凡零点 $\rho_n = \beta_n + ir_n$ 。

证明: (i) 从推论 1.4.7 的证明过程看, 它对于任意的满足

$$0 < |z_1| \leq |z_2| \leq \cdots \leq |z_n| \leq \cdots$$

的 $\xi(s, \chi)$ 零点的一个排列 $z_1, z_2, \cdots, z_n, \cdots$ 都是成立的。因此, 在其中取 $s = 2 + iT$, 并应用 § 1.4 的 (33) 式, 以及引理 1.1.5 的 (5) (注意: 对数函数取主分支), 可得

$$\begin{aligned} a(\chi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2 + iT - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) &= \frac{L'(2 + iT, \chi)}{L(2 + iT, \chi)} + \frac{1}{2} \log \frac{q}{\pi} \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\Gamma' \left(\frac{2 + iT + \delta}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{2 + iT + \delta}{2} \right)} = O(\log(q(|t| + 2))). \end{aligned} \quad (18)$$

因此, 在 (40) 中取实部, 并利用在推论 1.4.7 的证明中证明

$$\operatorname{Re}(a(\chi)) = - \sum_{n \geq 1} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{\rho_n} \right)$$

时所采用的一些讨论 (见 § 1.4 的 (45) ~ (46)), 可得

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(a(\chi) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2 + iT - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) \right) &= \operatorname{Re}(a(\chi)) \\ &+ \sum_{r=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2 + iT - \rho_n} + \frac{1}{\rho_n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2 + iT - \rho_n} \right) \\ &= \sum_{n \geq 1} \frac{2 - \beta_n}{(2 - \beta_n)^2 + (T - r_n)^2} = O(\log(qT)). \end{aligned}$$

因为

$$\frac{2 - \beta_n}{(2 - \beta_n)^2 + (T - r_n)^2} \geq \frac{1}{4 + (T - r_n)^2} \geq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 + (T - r_n)^2},$$

所以(i) 成立。

(ii) 由于

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + (T - r_n)^2} \geq \frac{1}{2} \sum_{|T - r_n| \geq 1} |T - r_n|^{-2},$$

由(i) 可知(ii) 成立。

(iii)(a) 由(i) 可知

$$\begin{aligned} \sum_{T_1 \leq r_n \leq T_1+1} 1 &\leq \sum_{n \geq 1} \frac{2}{1 + (T_1 - r_n)^2} \leq 2c_{26} \log(q(T_1 + 2)), \\ \sum_{T_1 \leq -r_n \leq T_1+1} 1 &= \sum_{-T_1 \leq r_n \leq -T_1} 1 \leq \sum_{n \geq 1} \frac{2}{1 + (-T_1 - r_n)^2} \\ &\leq 2c_{26} \log(q(T_1 + 2)). \end{aligned}$$

因此可得

$$\sum_{T_1 \leq |r_n| \leq T_1+1} 1 \leq 4c_{26} \cdot \log(q(T_1 + 2)).$$

(b) 在(i) 中取 $T = 0$, 可得

$$\sum_{|r_n| \leq 2} 1 \leq \sum_{n \geq 1} \frac{5}{1 + r_n^2} \leq 5c_{26} \log(2q).$$

因此, 对任意的 $T, T \geq 2$, 由(a) 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{|r_n| \leq T} 1 &\leq \sum_{0 \leq i \leq [T]-1} \sum_{T-i-1 \leq |r_n| \leq T-i} 1 + \sum_{|r_n| \leq 2} 1 \\ &\leq T(4c_{26} \log((T+1)q) + 17c_{26} \log(2q)) \\ &= O(T \log(qT)). \end{aligned}$$

(iv) 由(i) 可知

$$\sum_{T \leq r_n \leq T+1} 1 \leq \sum_{n \geq 1} \frac{2}{1 + (T - r_n)^2} \leq 2c_{26} L, L = \log(q(T+2)).$$

我们将区间 $[N, N+1]$ 分成 $N = [(2c_{26} + 1)L] + 1$ 个等分的小

段,即

$$T = T_0 < T_1 < \cdots < T_N = T + 1,$$

$$T_{k+1} - T_k = \frac{1}{N}, k = 0, 1, \cdots, N-1.$$

相应地,复 s 平面上的矩形

$$D = \{s = \beta + ir \mid 0 \leq \beta \leq 1, T \leq r \leq T+1\}$$

分成了 N 个形如

$$D_k = \{s = \beta + ir \mid 0 \leq \beta \leq 1, T_k \leq r \leq T_{k+1}\}$$

的小矩形,这里 $0 \leq k \leq N-1$ 。显然,至少一个 D_j 中不包含 $L(s, \chi)$ 的满足 $\rho = \beta + ir, 0 \leq \beta \leq 1, T \leq r \leq T+1$ 的零点 ρ 。于是,若令 $T' = \frac{1}{2}(T_j + T_{j+1})$, 则

$$|T' - r_n| \geq \frac{1}{2N} \geq \frac{1}{2((2c_{26} + 1)L + 1)} \geq \frac{1}{4(c_{26} + 1)L}$$

对于 $L(s, \chi)$ 的任一非平凡零点 $\rho_n = \beta_n + ir_n$ 成立。令 $c_{27} = (4(c_{26} + 1))^{-1}$ 即得所需。

(v) 应用推论 1.4.7, 将其中的 s 分别用 $2 + it$ 和 $z = \beta + it$ 代替(注意: z 不等于 $L(s, \chi)$ 的任一零点), 然后将所得二式相减, 可得

$$\begin{aligned} \frac{L'(z, \chi)}{L(z, \chi)} &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'\left(\frac{z+\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z+\delta}{2}\right)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \rho_n} - \frac{1}{2 + it - \rho_n} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'\left(\frac{2 + it + \delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2 + it + \delta}{2}\right)} + O(1). \end{aligned} \quad (19)$$

由对于 β 及 t 的假设, 由定理 1.1.5 的 (v) 可得

$$\frac{\Gamma'\left(\frac{z+\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{z+\delta}{2}\right)} = O(\log(|t|+2)),$$

$$\frac{\Gamma'\left(\frac{2+it+\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2+it+\delta}{2}\right)} = O(\log(|t|+2)).$$
(20)

又, 当 $\rho_n = \beta_n + ir_n, |t - r_n| \geq 1$ 时

$$\frac{1}{z - \rho_n} - \frac{1}{2 + it - z_n} = \frac{2 - \beta}{(\beta - \beta_n + i(t - r_n))(2 - \beta_n + i(t - r_n))}$$

$$\ll \frac{1}{|t - r_n|^2}.$$
(21)

由(ii) 我们有

$$\sum_{|t-r_n| \geq 1} |t - r_n|^{-2} \ll \log(q(|t|+2)).$$
(22)

由(19) ~ (22), 得到

$$\frac{L'(z, \chi)}{L(z, \chi)} = \sum_{|t-r_n| < 1} \left(\frac{1}{z - \rho_n} - \frac{1}{2 + it - \rho_n} \right) + O(\log(q(|t|+2))).$$

由(i) 可得

$$\sum_{|t-r_n| < 1} 1 \leq \sum_{n \geq 1} \frac{2}{1 + (t - r_n)^2} = O(\log(q(|t|+2))),$$

因此(v) 成立。证毕。

类似地, 对于 ζ 函数, 应用推论 1.4.9 和定理 1.1.5 的(v), 可得

定理 1.5.11 设 T 为实数, $\rho_n = \beta_n + ir_n (n = 1, 2, \dots)$ 为整函数 $\xi(s)$ 按照绝对值大小排序(显然, 不止一种排顺序的方法)的全部零点, 也即 $\zeta(s)$ 的所有非平凡的零点。则

$$(i) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + (T - r_n)^2} \leq c_{28} \log(|T|+2).$$

$$(ii) \sum_{|T-r_n| \geq 1} |T-r_n|^{-2} \leq 2c_{28} \log(|T|+2).$$

(iii)(a) 设 $T \geq 0$, 则满足 $T \leq |r_n| \leq T+1$ 的零点个数 $\leq 4c_{28} \log(T+2)$;

(b) 设 $T \geq 2$, 则满足 $|r_n| \leq T$ 的零点个数为 $O(T \log T)$ 。

(iv) 可找个 $T', T \leq T' \leq T+1$, 使得 $|T' - r_n| \geq c_{29}(\log(T+2))^{-1}$ 对每个零点 $\rho_n = \beta_n + ir_n$ 都成立。

(v) 若 $z = \beta + it, -2 \leq \beta \leq 3, |t| \geq \mu_1 > 0$, 或 $0 < \mu_2 \leq |\beta| \leq \mu_3 < 2$, 或 $\beta \geq 1, \mu_i$ 为常数, 且 z 不与任一零点 ρ_n 相等, $z \neq 1$, 则有

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{|t-r_n| < 1} \frac{1}{z-\rho_n} + O(\log(|t|+2)).$$

读者可将这个定理的证明作为练习。

设 $T \geq 3, \chi$ 为模 q 的原特征, $q \geq 3$ 。我们用 $N(T, \chi)$ 表示 $L(s, \chi)$ 的满足条件 $|t| \leq T$ 的非平凡零点 $s = \sigma + it$ 的数目, 其中零点是几阶的就重复计数几次。基于我们已经证明的 L 函数零点分布的一些知识, 我们可以用复分析的方法, 获得 $N(T, \chi)$ 当 $T \rightarrow \infty$ 时的渐近公式, 我们有

定理 1.5.12 设 $T \geq 3, q \geq 3, q$ 为整数, χ 为模 q 的原特征, $N(T, \chi)$ 为 $L(s, \chi)$ 的满足条件 $|t| \leq T$ 的非平凡零点 $s = \sigma + it$ 的数目, 其中零点是几阶的就重复计数几次。则

$$N(T, \chi) = \frac{T}{\pi} \log \frac{q}{\pi} + \frac{T}{\pi} \log T - T \left(\frac{\log 2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right) + O(\log(qT)).$$

证明: 由定理 1.5.10 的 (iv) 可知, 可找到 $T', T \leq T' \leq T+1$, 使得对于 $\xi(s, \chi)$ 的任一个零点 $\rho = \beta + ir$, 都有

$$|T' - r| \geq \frac{c_{27}}{\log(q(T+2))}.$$

又由于 $\bar{\rho} = \beta - ir$ 为 $\xi(s, \bar{\chi})$ 的零点 (见定理 1.5.10 的 (iii) 的 (a))

证明中的说明), 由定理 1.5.10 的(iv), 可找到数 $T'', T \leq T'' \leq T+1$, 使得

$$|-T'' - r| = |T'' - (-r)| = |T'' + r| \geq \frac{c_{27}}{\log(q(T+2))}.$$

设 $N(T', T''; \chi)$ 为 $L(s, \chi)$ 的满足 $0 \leq \sigma \leq 1, -T'' \leq t \leq T'$ 的非平凡零点 $\sigma + it$ 的个数(零点是几阶的就被计数几次), 则由定理 1.5.10 的(iii) 的(a) 可得

$$N(T', T''; \chi) = N(T, \chi) + O(\log(qt)). \quad (23)$$

复 s 平面上的 4 点 A, B, C, D 定义为

$$A = \frac{5}{2} - iT'', B = \frac{5}{2} + iT', C = -\frac{3}{2} + iT', D = -\frac{3}{2} - iT'',$$

$\Delta = \delta_1 \delta_2 \delta_3 \delta_4$ 为以 $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ 和 δ_4 为边的矩形, 这里 δ_1 为连接点 A 与 B 的竖线, δ_2 为连接点 B 与 C 的横线, δ_3 为连接 C 与 D 的竖线, δ_4 为连接 D 与 A 的横线。由于亚纯函数 $L'(s, \chi)/L(s, \chi)$ 以函数 $L(s, \chi)$ 的零点为极点, 所以它在包含闭矩形 δ 的一个稍大的小开矩形 Δ' 中是解析的, 这个 Δ' 与 Δ 内部含有 $L(s, \chi)$ 同样的零点。因此, 在 Δ' 内部, $L'(s, \chi)/L(s, \chi)$ 的全部极点是 $L(s, \chi)$ 的非平凡零点与 0 (若 $\chi(-1) = 1$) 或 -1 (或 $\chi(-1) = -1$)。若 z 为 $L(s, \chi)$ 在 Δ' 内部的一个零点, 则

$$L(s, \chi) = (s - z)^h F(s), h \geq 1, h \text{ 为整数},$$

其中 $F(z) \neq 0, F(s)$ 为整函数。于是, 当 $0 < |s - z| < \lambda$, 且 λ 充分地小时, s 属于 Δ' 的内部, $F(s) \neq 0$, 并且这时

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \frac{h(s - z)^{h-1} + (s - z)^h F'(s)}{L(s, \chi)} = \frac{h}{s - z} + \frac{F'(s)}{F(s)}.$$

由此局部分析看出, 若 z 为 $L(s, \chi)$ 的 h 阶零点, z 属于 Δ 的内部, 则 z 为 $L'(s, \chi)/L(s, \chi)$ 的 1 阶极点, 且残数为 h 。于是由残数定理可得(考虑到 $L(s, \chi)$ 可能以 0 或 -1 为零点, 同时注意到, 由

$\xi(0, \chi) \neq 0$ 、函数方程及 Γ 函数的性质, 0 或 -1 仅能成为 $L(s, \chi)$ 的 1 阶零点, 见 § 1.3 的练习(I) 与练习(II)。

$$\int_{\Delta} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} ds = 2\pi i (N(T', T''; \chi) + O(1)), \quad (24)$$

这里 \int_{Δ} 表示沿矩形 Δ 边界的积分。当 $s = 5/2 + it$ 时, 由(1)可知

$$\begin{aligned} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} &= - \sum_{n \geq 1} \frac{\Lambda(n) \chi(n)}{n^s} = - \sum_{n \geq 1} \Lambda(n) \chi(n) n^{-5/2} n^{-it} \\ \int_{\delta_1} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} ds &= -i \left(\sum_{n \geq 2} \frac{\Lambda(n) \chi(n)}{n^{5/2}} \int_{-T}^T n^{-it} dt \right) \\ &= \sum_{n \geq 2} \Lambda(n) \chi(n) n^{-5/2} (\log n)^{-1} \\ &\quad \cdot (e^{-iT \log n} - e^{iT \log n}) = O(1), \end{aligned} \quad (25)$$

这里 \int_{δ_1} 表示沿直线段 δ_1 的积分。当 $s = \sigma + iT'$, $-3/2 \leq \sigma \leq 5/2$ 时, 由定理 1.5.10 的(v), 我们有

$$\begin{aligned} \int_{\delta_2} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} ds &= \int_{\delta_2} \left(\sum_{|T' - \gamma_n| < 1} \frac{1}{s - \rho_n} + O(\log(qT)) \right) ds \\ &= \sum_{|T' - \gamma_n| < 1} \int_{\delta_2} \frac{ds}{s - \rho_n} + O(\log(qT)), \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $\beta_n + i\gamma_n = \rho_n$ 为 $L(s, \chi)$ 的非平凡零点。由 T' 的选取, 可知当 z 属于包含线段 δ_2 的一个适当的小开矩形 Δ_1 时, $z - \rho_n$ 的虚部不为零, 于是, 设 $s_0 = -3/2 + iT'$, 我们可以对任意的 $s \in \Delta_1$ 定义

$$g_n(s) = \int_{s_0}^s \frac{dz}{z - \rho_n} - \log(s - \rho_n) + \log(s_0 - \rho_n),$$

其中对数函数取主分支, 积分是沿从 s_0 至 s 的直线段取的。容易验证, $g_n(s)$ 是 Δ_1 上的解析函数, 且

$$g'_n(s) = 0, g_n(s_0) = 0.$$

由此可知 $g_n(s)$ 在 Δ_1 上恒等于零。特别地, 当 $|T' - r_n| < 1$ 时, 这给出

$$\begin{aligned} \int_{\delta_2} \frac{dz}{z - \rho_n} &= \log\left(\frac{5}{2} + iT' - \rho_n\right) \\ &- \log\left(-\frac{3}{2} + iT' - \rho_n\right) = O(1). \end{aligned} \quad (27)$$

由 (26)、(27) 及定理 1.5.10(iii) 的 (a), 我们得

$$\int_{\delta_2} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} ds = O(\log(qT)). \quad (28)$$

类似地可得

$$\int_{\delta_4} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} ds = O(\log(qT)). \quad (29)$$

为计算展布在 δ_3 上的积分, 由函数方程 (定理 1.3.5 的 (i)) 可得, 当 $s \in \delta_3$ 时

$$\begin{aligned} L(s, \chi) &= \frac{\tau(\chi)}{i^\delta q^{\frac{1}{2}}} L(1-s, \bar{\chi}) (q\pi^{-1})^{\frac{1}{2}-s} \times \\ &\quad \Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s+\delta)\right) \left(\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right)\right)^{-1}, \\ \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} &= -\frac{L'(1-s, \bar{\chi})}{L(1-s, \bar{\chi})} - \log\left(\frac{q}{\pi}\right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}(1-s+\delta)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s+\delta)\right)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right)}, \end{aligned}$$

于是

$$\int_{\delta_3} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} ds = - \int_{\delta_3} \frac{L'(1-s, \bar{\chi})}{L(1-s, \bar{\chi})} ds + i(T' + T'') \log(q\pi^{-1})$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_{\delta_3} \frac{\Gamma' \left(\frac{1}{2}(1-s+\delta) \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2}(1-s+\delta) \right)} ds \\
& -\frac{1}{2} \int_{\delta_3} \frac{\Gamma' \left(\frac{1}{2}(s+\delta) \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2}(s+\delta) \right)} ds. \tag{30}
\end{aligned}$$

可与(25)类似地得到

$$\int_{\delta_3} \frac{L'(1-s, \overline{\chi})}{L(1-s, \chi)} ds = O(1). \tag{31}$$

当 $s \in \delta_3$ 时, $s = -3/2 + it$, $-T'' \leq t \leq T'$, 所以由定理1.1.5的(v) 可得

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma' \left(\frac{1}{2}(1-s+\delta) \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2}(1-s+\delta) \right)} &= \frac{\Gamma' \left(\frac{5}{4} + \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}it \right)}{\Gamma \left(\frac{5}{4} + \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}it \right)} \\
&= \log \left(\frac{9}{4} + \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}it \right) + O \left(\frac{1}{|t|+1} \right),
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
& \int_{\delta_3} \frac{\Gamma' \left(\frac{1}{2}(1-s+\delta) \right)}{\Gamma \left(\frac{1}{2}(1-s+\delta) \right)} ds \\
&= -i \int_{-T''}^{T'} g(t) dt + O(\log T), \tag{32}
\end{aligned}$$

这里 $g(t) = \log \left(\frac{9}{4} + \frac{\delta}{2} - \frac{1}{2}it \right)$, 对数值是用主分支定义的。 $g(t)$ 是区间 $I = (-2T'', 2T')$ 上的可导函数。若设 $g(t) = u(t) + iv(t)$, $u(t)$ 及 $v(t)$ 为实值函数, 则易知 $u(t)$ 与 $v(t)$ 也为 I 上可导函数。由实函数的分部积分及(27) 中计算复积分的方法, 可得

$$\begin{aligned}
\int_{-T''}^{T'} g(t) dt &= \int_{-T''}^{T'} u(t) dt + i \int_{-T''}^{T'} v(t) dt \\
&= tu(t) \Big|_{-T''}^{T'} - \int_{-T''}^{T'} tu'(t) dt + itv(t) \Big|_{-T''}^{T'} \\
&\quad - i \int_{-T''}^{T'} tv'(t) dt \\
&= tg(t) \Big|_{-T''}^{T'} - \int_{-T''}^{T'} t \cdot g'(t) dt \\
&= T'g(T') + T''g(-T'') \\
&\quad - \int_{-T''}^{T'} \left(1 - \frac{9/4 + \delta/2}{9/4 + \delta/2 - 1/2it}\right) dt \\
&= g(T')(T' - \frac{9}{2}i - \delta i) + g(-T'')(T'' \\
&\quad + \frac{9}{2}i + \delta i) - T' - T''. \tag{33}
\end{aligned}$$

我们有

$$g(T') = \log \left[\left(\frac{9}{4} + \frac{\delta}{2} \right)^2 + \left(\frac{T'}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} + i\theta_1, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_1 < 0,$$

其中

$$\sin \theta_1 = \frac{-\frac{T'}{2}}{\sqrt{\left(\frac{9}{4} + \frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{T'}{2}\right)^2}} = -1 + O(T^{-2}).$$

所以

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_1\right) = 1 + O(T^{-2}),$$

$$\sin\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + \theta_1\right)\right] = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_1\right)\right)} = O(T^{-1}),$$

并由当 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 时成立的不等式 $1 \leq \frac{\theta}{\sin \theta} \leq \frac{\pi}{2}$ 可得

$$\theta_1 + \frac{\pi}{2} = O(T^{-1}).$$

于是,由 $T \leq T' \leq T+1$ 可知

$$g(T') = \log\left(\frac{T'}{2}\right) - \frac{\pi}{2}i + O(T^{-1}) = \log\left(\frac{T}{2}\right) - \frac{\pi}{2}i + O(T^{-1});$$

类似地,由 $T \leq T'' \leq T+1$ 可得

$$g(-T'') = \log\left(\frac{T}{2}\right) + \frac{\pi}{2}i + O(T^{-1}).$$

所以由(33) 我们有

$$\begin{aligned} \int_{-T''}^{T'} g(t) dt &= (T' + T'') \left(\log \frac{T}{2} \right) + \frac{\pi}{2}i(-T' + T'') \\ &\quad - T' - T'' + O(\log T) \\ &= 2T \log \frac{T}{2} - 2T + O(\log T). \end{aligned} \quad (34)$$

由(32) 及(34) 可得

$$\begin{aligned} \int_{\delta_3} \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}(1-s+\delta)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(1-s+\delta)\right)} ds &= -2iT \log\left(\frac{T}{2}\right) \\ &\quad + 2iT + O(\log T). \end{aligned} \quad (35)$$

类似地,当 $t \in (-2T'', 2T')$ 时令

$$G(t) = \log\left(\frac{1}{4} + \frac{\delta}{2} + \frac{it}{2}\right),$$

这里对数取主分支,则由引理 1.1.5 的(v) 及分部积分可得

$$\begin{aligned} \int_{\delta_3} \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}(s+\delta)\right)} ds &= -i \int_{-T''}^{T'} \frac{\Gamma'\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2} + it + \delta\right)\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2} + it + \delta\right)\right)} dt \\ &= -i \int_{-T''}^{T'} G(t) dt + O(\log T) \\ &= -2iT \log\left(\frac{T}{2}\right) + 2iT + O(\log T). \end{aligned} \quad (36)$$

由(20) ~ (22), (28) ~ (31), (35) 及(36), 可知定理 1.5.15 成立。

证毕。

对于 ζ 函数,若设 $T \geq 3$,并用 $N(T)$ 表示 $\zeta(s)$ 的满足 $\rho = \beta + it$ 且 $|t| \leq T$ 的非平凡零点 ρ 的个数,则与定理 1.5.12 类似地,我们也可以获得 $N(T)$ 当 $T \rightarrow \infty$ 时的渐近公式。

本节最后的目的是证明下列命题:

定理 1.5.13 设 $q \geq 3$, $\chi(n)$ 是模 q 的一个实原特征,则存在一个可计算的绝对常数 $c > 0$,使得若 σ 为 $L(s, \chi)$ 的一个非平凡实零点,则

$$1 - \sigma > cq^{-1/2}(\log q)^{-4}.$$

为证明本结果,我们先证明若干引理。

引理 1.5.14 设 s 为一复数, $\text{Res} > 0$, $\chi(n)$ 为模 q 的特征, $q \geq 3$, 则对任一实数 $a > 1$,

$$L'(s, \chi) = - \sum_{n \leq a} \frac{\chi(n) \log n}{n^s} - \int_a^\infty \left(\sum_{a < n \leq y} \chi(n) \right) y^{-s-1} (1 + s \log y) dy.$$

证明: 当 $\text{Res} > 1$ 时, 设 $b > a > 1$. 由引理 1.1.3 可得

$$\begin{aligned} - \sum_{a < n \leq b} \frac{\chi(n) \log n}{n^s} &= - \int_a^b \left(\sum_{a < n \leq y} \chi(n) \right) y^{-s-1} (1 + s \log y) dy \\ &\quad - b^{-s} \log b \left(\sum_{a < n \leq b} \chi(n) \right). \end{aligned} \quad (37)$$

应用定理 1.2.2(iii), 不难看出估计

$$\left| \sum_{a < n \leq b} \chi(n) \right| \leq \varphi(q)$$

总成立。因此, 在(37) 两边令 $b \rightarrow +\infty$, 可得

$$\begin{aligned} L'(s, \chi) + \sum_{n \leq a} \frac{\chi(n) \log n}{n^s} &= - \int_a^\infty \left(\sum_{a < n \leq y} \chi(n) \right) y^{-s-1} (1 + s \log y) dy. \end{aligned} \quad (38)$$

注意:(38) 的左边当 $\text{Res} > 0$ 时是解析的, 而我们又可与引理

1.1.1 的证明中类似地证明(38) 的右边当 $\operatorname{Re} s > 0$ 时也为 s 的解析函数。故由解析开拓原理, 可知(38) 在 $\operatorname{Re} s > 0$ 时也成立。证毕。

引理 1.5.15 设 $q \geq 3, \chi(n)$ 为模 q 的原特征, $\sigma \in \left[1 - \frac{1}{2\log q}, 1\right]$, 则 $|L'(\sigma, \chi)| \leq 51(\log q)^2$ 。

证明: 由引理 1.5.14, 并应用定理 1.2.4, 可知

$$\begin{aligned} |L'(\sigma, \chi)| &\leq \sum_{n \leq q} \frac{\log n}{n^\sigma} \\ &+ \int_q^\infty (4q^{1/2} \log q) y^{-\sigma-1} (1 + \log y) dy. \end{aligned} \quad (39)$$

显然

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq q} \frac{\log n}{n^\sigma} &\leq (\log q) \left(1 + \int_1^q u^{-\sigma} du\right) \\ &= (\log q) \left(1 + \frac{q^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}\right) \leq 3(\log q)^2, \\ \int_q^\infty y^{-\sigma-1} (1 + \log y) dy &\leq 2 \int_q^\infty y^{-\sigma-1} \log y dy \\ &= \frac{2}{\sigma} (\log q + \sigma^{-1}) q^{-\sigma} \leq 12q^{-1} \log q; \end{aligned}$$

在推导中用到

$$\sigma \geq 1 - \frac{1}{2\log q} \geq 1 - \frac{1}{2\log 3} \geq \frac{1}{2}.$$

因此, 由(39) 可知

$$|L'(\sigma, \chi)| \leq 3(\log q)^2 + 48q^{-1/2}(\log q)^2 \leq 51(\log q)^2.$$

证毕。

引理 1.5.16 设 $0 < \alpha < 1$, 则

$$\int_0^\infty \alpha^{u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \left(\log \frac{1}{\alpha}\right)^{-1/2}.$$

证明: 由于 $\alpha = \exp(-\log \frac{1}{\alpha})$, 我们有

$$\int_0^\infty \alpha^{u^2} du = \int_0^\infty e^{-\beta u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\beta}} \int_0^\infty e^{-v^2} dv; \quad (40)$$

其中 $\beta = \log \frac{1}{\alpha} > 0$, 而且已做了变量替换 $\sqrt{\beta}u = v$ 。由于

$$\left(\int_0^\infty e^{-v^2} dv \right)^2 = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} dx dy,$$

在其中令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, r > 0$, 则有

$$\left(\int_0^\infty e^{-v^2} dv \right)^2 = \int_0^\infty \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{\pi}{4}。$$

所以由(40)可知本引理成立。证毕。

引理 1.5.17 设 $q \geq 3, \chi(n)$ 为模 q 的实原特征, 则存在一个可以计算的正的常数 λ , 使得

$$L(1, \chi) \geq \lambda q^{-1/2} (\log q)^{-2}。$$

证明: 设 $t \in (0, 1), t$ 为一个待选参数。令

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n, \quad a_n = \sum_{d|n} \chi(d),$$

$$G(t) = H(t) - \frac{L(1, \chi)}{1-t}。$$

一方面, 由于若 $n = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$, 则

$$a_n = \prod_{1 \leq i \leq k} (1 + \chi(p_1) + \cdots + (\chi(p_i))^{r_i}),$$

因此, 对于 $m \geq 1, a_m^2 \geq 1$,

$$\begin{aligned} H(t) &\geq \sum_{m \geq 1} t^{m^2} \geq \int_1^\infty t^{u^2} du \geq \int_0^\infty t^{u^2} du - 1 \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(\log \frac{1}{t} \right)^{-1/2} - 1; \end{aligned} \quad (41)$$

最后一步应用了引理 1.5.16。另一方面, 由于

$$\begin{aligned}
 H(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{d|n} \chi(d) \right) t^n = \sum_{d=1}^{\infty} \chi(d) \left(\sum_{m=1}^{\infty} t^{dm} \right) \\
 &= \sum_{d=1}^{\infty} \chi(d) \cdot \frac{t^d}{1-t^d},
 \end{aligned}$$

若令

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{m \geq n} \frac{\chi(m)}{m}, \quad T_r = \sum_{m \leq r} \chi(m), \\
 P_d(t) &= \frac{1}{1-t^d} - \frac{1}{d(1-t)},
 \end{aligned}$$

则有(用到定理 1.2.4)

$$\begin{aligned}
 G(t) &= \sum_{d=1}^{\infty} \chi(d) \frac{t^d}{1-t^d} - \frac{L(1, \chi)}{1-t} \\
 &= \sum_{d=1}^{\infty} \chi(d) \left(\frac{t^d}{1-t^d} - \frac{t^d}{d(1-t)} \right) \\
 &\quad + \sum_{d=1}^{\infty} (S_d - S_{d+1}) \frac{t^d}{1-t} - \frac{L(1, \chi)}{1-t} \\
 &= \sum_{d=1}^{\infty} \chi(d) \left(\frac{t^d}{1-t^d} - \frac{t^d}{d(1-t)} \right) + \sum_{d=1}^{\infty} S_d \frac{t^d}{1-t} \\
 &\quad - \sum_{d \geq 2} S_d \cdot \frac{t^{d-1}}{1-t} - \frac{S_1}{1-t} \\
 &= \sum_{d \geq 1} \chi(d) t^d \left(\frac{1}{1-t^d} - \frac{1}{d(1-t)} \right) - \sum_{d \geq 1} S_d t^{d-1} \\
 &= \sum_{d \geq 1} (T_d - T_{d-1}) P_d(t) - \sum_{d \geq 1} \left(\sum_{m \geq d} \frac{T_m - T_{m-1}}{m} \right) t^{d-1} \\
 &= \sum_{d \geq 1} T_d P_d(t) - \sum_{d \geq 1} T_d P_{d+1}(t) \\
 &\quad - \sum_{d \geq 2} \left(\sum_{m \geq d} \frac{T_m}{m} - \sum_{m \geq d-1} \frac{T_m}{m+1} \right) t^{d-1} - L(1, \chi) \\
 &= \sum_{d \geq 1} T_d (P_d(t) - P_{d+1}(t)) - \sum_{d \geq 2} \left(\sum_{m \geq d} \frac{T_m}{m(m+1)} \right) t^{d-1} \\
 &\quad - \sum_{d \geq 2} \frac{T_d}{d+1} t^{d-1} - L(1, \chi)
 \end{aligned}$$

$$\leq (2q^{1/2} \log q) \left(\sum_{d \geq 1} |P_d(t) - P_{d+1}(t)| + 2 \sum_{d \geq 2} \frac{t^{d-1}}{d} \right). \quad (42)$$

由于

$$\begin{aligned} \sum_{d \geq 2} \frac{t^{d-1}}{d} &\leq \sum_{d \geq 1} \frac{t^d}{d} = -\log(1-t), \\ \sum_{d \geq 1} |P_d(t) - P_{d+1}(t)| &\leq \sum_{d \geq 1} \frac{1}{1-t} \left(|F_d(t)| + \frac{(1-t)}{d+1} t^d \right) \\ &\leq \sum_{d \geq 1} \frac{1}{1-t} |F_d(t)| - \log(1-t), \\ \sum_{d \geq 1} |F_d(t)| &= \sum_{d \geq 1} \frac{t^d}{1+t+\cdots+t^{d-1}} - \frac{t^{d+1}}{1+t+\cdots+t^d} - \frac{t^d}{d(d+1)} \\ &= \sum_{d \geq 1} \left(\frac{t^d}{1+t+\cdots+t^{d-1}} - \frac{t^{d+1}}{1+t+\cdots+t^d} - \frac{t^d}{d(d+1)} \right) \\ &= t - \sum_{d \geq 1} \frac{t^d}{d(d+1)} = t - 1 - \frac{1-t}{t} \log(1-t), \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} G(t) &\leq \left(\frac{1}{1-t} \left(t - 1 - \frac{1-t}{t} \log(1-t) \right) - 3 \log(1-t) \right) (2q^{1/2} \log q) \\ &\leq (2q^{1/2} \log q) \left(\left(\frac{1}{t} + 3 \right) \log \left(\frac{1}{1-t} \right) \right). \end{aligned} \quad (43)$$

设 $\frac{1}{4} \leq t \leq 1$, 并令

$$f(t) = 4(1-t) + \log t.$$

则由 $f(1) = 0$ 以及当 $\frac{1}{4} < t < 1$ 时成立的显然不等式 $f'(t) = -4 + \frac{1}{t} < 0$, 可知 $f(t) \geq 0$ 当 $\frac{1}{4} \leq t < 1$ 时总成立, 故此时有

$$\frac{1}{\sqrt{\log \frac{1}{t}}} \geq \frac{1}{2\sqrt{1-t}}. \quad (44)$$

由(41), (43) 及(44), 可知当 $t \in (\frac{1}{4}, 1)$ 时必有

$$\frac{L(1, \chi)}{1-t} = H(t) - G(t) > \frac{1}{4\sqrt{1-t}} - 1 - 14q^{1/2}(\log q)\log\left(\frac{1}{1-t}\right). \quad (45)$$

令 $t = 1 - cq^{-1}(\log q)^{-4}$, 则当 c 充分小时, 由 (45) 必可得 (注意: 对任一常数 $D > 0$, 当 c 充分小时, 必有 $c^{-1/2} > D\log(1/c)$)

$$L(1, \chi) > 0.2(1-t)^{1/2} = 0.2c^{1/2}q^{-1/2}(\log q)^{-2}.$$

证毕。

定理 1.5.13 的证明: 由 $L(\sigma, \chi) = 0$, 并用中值定理, 得

$$L(1, \chi) = L(1, \chi) - L(\sigma, \chi) = (1-\sigma)L'(\xi, \chi), \quad (46)$$

其中 $\xi \in (\sigma, 1)$ 。如果

$$\sigma < 1 - \frac{1}{2\log q},$$

则显然有

$$1 - \sigma > \frac{1}{2\log q} \geq \frac{1}{2q^{\frac{1}{2}}(\log q)^4}.$$

设 $1 > \sigma \geq 1 - (2\log q)^{-1}$, 则应用引理 1.5.15 与引理 1.5.17, 由 (46) 可知所需结论仍成立。证毕。

练 习

(I) 用证明定理 1.5.10 的类似方法, 证明定理 1.5.11。

(II) 设 $T \geq 3$, 用 $N(T)$ 表示 $\zeta(s)$ 的满足 $\rho = \beta + it$, $|t| \leq T$ 的非平凡零点 ρ 的个数。用定理 1.5.12 的证明方法和定理 1.5.11, 证明

$$N(T) = \frac{T}{\pi} \log \frac{T}{\pi} - T \left(\frac{\log 2}{\pi} + \frac{1}{\pi} \right) + O(\log T).$$

§ 1.6 算术级数中的素数

设 q 为给定的正整数, $q \geq 3$, 正整数 a 与 q 互素, x 为充分大实数, 我们用 $\pi(x; q, a)$ 表示算术级数 $a + kq (k \geq 0)$ 中不超过 x 的素数个数, 即

$$\pi(x; q, a) = \sum_{\substack{p \leq x \\ p \equiv a \pmod{q}}} 1.$$

设

$$\psi(y; q, a) = \sum_{\substack{n \equiv a \pmod{q} \\ n \leq y}} \Lambda(n), y \geq 2,$$

其中 $\Lambda(n)$ 为 von Mangoldt 函数, 即当 $n = p^m, m \geq 1, p$ 为素数时 $\Lambda(n) = \log p$, 否则 $\Lambda(n) = 0$ 。则

$$\begin{aligned} \pi(x; q, a) &= \sum_{2 \leq n \leq x} (\psi(n; q, a) - \psi(n-1; q, a)) \frac{1}{\log n} \\ &+ O\left(\sum_{\substack{p^m \leq x \\ m \geq 2}} \frac{1}{m}\right) = \sum_{2 \leq n \leq x} \frac{\psi(n; q, a)}{\log n} \\ &- \sum_{2 \leq n \leq x-1} \frac{\psi(n; q, a)}{\log(n+1)} + O(x^{1/2} \log x) \\ &= \sum_{\sqrt{x} \leq n \leq x} \psi(n; q, a) \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right) \\ &+ \frac{\psi([x]; q, a)}{\log([x] + 1)} + O(x^{1/2} \log x). \end{aligned} \quad (1)$$

因此, 我们可通过研究 $\psi(y; q, a)$ 的渐近性状, 来研究 $\pi(x; q, a)$ 的渐近性状。由定理 1.2.2 的(ii), 我们有

$$\begin{aligned} \psi(y; q, a) &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{n \leq y} \Lambda(n) \left(\sum_{\chi} \chi(n) \bar{\chi}(a) \right) \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \psi(y, \chi_0) + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(a) \psi(y, \chi), \end{aligned} \quad (2)$$

其中 \sum_{χ} 表示 χ 取模 q 所有特征, χ_0 为模 q 主特征, 而

$$\psi(y, \chi) = \sum_{n \leq y} \chi(n) \Lambda(n).$$

显然, 我们有

$$\psi(y, \chi_0) = \sum_{n \leq y} \Lambda(n) + O((\log y)^2).$$

若设 χ 为模 q 的非主特征, 由定理 1.2.2 的 (v), 可知存在模 q_1 的原特征 χ_1 , $q_1 | q$, $3 \leq q_1 \leq q$, χ 由模 q_1 的原特征 χ_1 诱导出, 即当 $(n, q) = 1$ 时, $\chi(n) = \chi_1(n) \chi_0(n)$. 显见有

$$\begin{aligned} \psi(y, \chi) &= \sum_{n \leq y} \chi_1(n) \Lambda(n) + O\left(\sum_{\substack{n \leq y \\ (n, q_1) > 1}} \Lambda(n)\right) \\ &= \psi(y, \chi_1) + O(\log y \cdot \log q). \end{aligned} \quad (3)$$

因此, 我们需要研究当 χ_1 为模 q_1 原特征时的 $\psi(y, \chi_1)$ 及 $\sum_{n \leq y} \Lambda(n)$. 用 $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ 表示若干正的绝对常数, 我们将证明

定理 1.6.1 (i) 设 χ 为模 q 的原特征, $3 \leq q \leq Q$, $x \geq 9$, 则

$$\psi(x, \chi) = -\theta \frac{x^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}} - \sum'_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T} \frac{x^{\rho}}{\rho} + O\left(\frac{x}{T} (\log(Qx))^2\right),$$

其中 $3 \leq T \leq \sqrt{x}$, $\theta = 1$ 或 0 视是否存在 Q -例外零点 $\tilde{\beta}$ (定义见定理 1.5.2) 而定, 对 ρ 的求和通过 $L(s, \chi)$ 的满足 $|\operatorname{Im} \rho| \leq T$ 的非平凡零点 ρ , 且 $\rho \neq \tilde{\beta}$ 及 $1 - \tilde{\beta}$ (若 $\tilde{\beta}$ 存在)。

$$(ii) \psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x - \sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T} \frac{1}{\rho} x^{\rho} + O\left(\frac{x}{T} (\log x)^2\right),$$

其中 $3 \leq T \leq \sqrt{x}$, 求和通过一切满足 $|\operatorname{Im} \rho| \leq T$ 的 $\zeta(s)$ 的非平凡零点。

$$(iii) \psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + O(x \exp(-\lambda_1 \sqrt{\log x})).$$

$$(iv) \pi(x) = \sum_{p \leq x} 1 = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x \exp(-\lambda_2 \sqrt{\log x})).$$

(v) 设 δ 为一正数, $\delta < 1/2$, 则当 $x \geq x_0(\delta) > 0$ 及 $3 \leq q \leq (\log x)^{2-3\delta}$ 时,

$$\phi(x; q, a) = \frac{x}{\varphi(q)} + O(x \cdot \exp(-c_1(\delta)(\log x)^\delta)),$$

其中 $x_0(\delta)$ 及 $c_1(\delta)$ 为两个仅与 δ 有关的正的常数。

(vi) 对 δ, x 与 q 的假设同(v), 则

$$\pi(x; q, a) = \frac{1}{\varphi(q)} \int_2^x \frac{du}{\log u} + O\left(x \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} c_1(\delta)(\log x)^\delta\right)\right).$$

为证该结果, 除前几节的预备知识外, 我们还需先证两个引理。

引理 1.6.2 设 $T \geq 3, a \neq 1, a > 0, b > 0$ 。若 $a > 1$, 则 $\Delta(a) = 1$, 否则 $\Delta(a) = 0$ 。则

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{a^s}{s} ds = \Delta(a) + O\left(\frac{a^b}{T|\log a|}\right),$$

其中 L 为复 s 平面上从点 $b - iT$ 到点 $b + iT$ 的竖直线段。

证明: 若 $a > 1$, 设 $U \geq 3$ 。由残数定理可得

$$\int_L \frac{a^s}{s} ds = 2\pi i + I_1 + I_2 + I_3,$$

其中 I_1 为沿从 $-U + iT$ 至 $b + iT$ 连线的积分, I_2 为沿从 $-U - iT$ 至 $-U + iT$ 的连线的积分, I_3 为沿着从 $b - iT$ 至 $-U - iT$ 连线的积分, 被积函数均为 a^s/s 。我们有

$$|I_1| = |I_3| = O\left(\int_{-U}^b \frac{a^\sigma}{T} d\sigma\right) = O\left(\frac{1}{T \log a} (a^b - a^{-U})\right),$$

$$|I_2| = O\left(\int_{-T}^T \frac{a^{-U}}{U} dt\right) = O\left(\frac{Ta^{-U}}{U}\right).$$

因此, 令 $U \rightarrow \infty$, 可得所需结果。在 $0 < a < 1$ 时, 仅需将由 $b + iT, b - iT, -U - iT, -U + iT$ 所确定的矩形换成由 $b + iT, U + iT, U - iT$ 和 $b - iT$ 所确定的矩形, 并运用残数定理作类似的讨论。证毕。

引理 1.6.3 当 $x \geq 0$ 时, $\log(1+x) \geq \frac{x}{x+1}$ 。

证明: 令 $f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{x+1}, x \geq 0$ 。则

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0,$$

故 $f(x)$ 为单调增函数。由 $f(0) = 0$ 可得 $f(x) \geq 0$ 。证毕。

定理 1.6.1 的证明: (i) 的证明。由定理 1.5.10 的 (iv), 与定理 1.5.12 的证明的开头类似地, 可找到属于区间 $[T, T+1]$ 的数 T' 及 T'' , 使得

$$|T' - r_n| \geq \frac{c_{27}}{\log(q(T+2))},$$

$$|T'' + r_n| \geq \frac{c_{27}}{\log(q(T+2))},$$

对 $L(s, \chi)$ 的所有非平凡零点 $\rho_n = \beta_n + i r_n$ 成立。我们有

$$\psi(x, \chi) = \psi(Y, \chi) + O(\log x), \quad (4)$$

其中 $Y = [x] + \frac{1}{2}$ 。设 $\sigma > 1$ 。由引理 1.6.2, 对充分大正整数 N , $N > Y$, 我们有

$$\begin{aligned} \psi(Y, \chi) &= \sum_{n \leq Y} \chi(n) \Lambda(n) = \sum_{n \leq N} \chi(n) \Lambda(n) \Delta\left(\frac{Y}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - iT'}^{\sigma + iT'} \frac{Y^s}{s} \left(\sum_{n \leq N} \chi(n) \Lambda(n) n^{-s} \right) ds \\ &\quad + O\left(\frac{1}{T} Y^\sigma \left(\sum_{1 \leq n \leq N} \frac{\log n}{n^\sigma \left| \log \frac{Y}{n} \right|} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - iT''}^{\sigma + iT'} \frac{Y^s}{s} \left(\sum_{n \leq N} \chi(n) \Lambda(n) n^{-s} \right) ds \\ &\quad + O\left(\frac{Y^\sigma}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma} \right) + O\left(\frac{Y^\sigma}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma \left| \log \frac{Y}{n} \right|} \right). \end{aligned}$$

由 § 1.4 的 (i) 我们有

$$\sum_{n \leq N} \chi(n) \Lambda(n) n^{-s} = -\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} + O\left(\sum_{n > N} \frac{\log n}{n^\sigma}\right).$$

由求导可知函数 $(\log t)t^{-\sigma}$ 当 $t > N > e$ 时为下降函数, 所以

$$\begin{aligned} \sum_{n > N} \frac{\log n}{n^\sigma} &= \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \int_{n-1}^n \frac{\log t}{t^\sigma} dt = \int_N^{\infty} \frac{\log t}{t^\sigma} dt \\ &\ll \frac{1}{\sigma-1} N^{1-\sigma} \log N + \frac{N^{1-\sigma}}{(1-\sigma)^2}. \end{aligned} \quad (5)$$

现取 $\sigma = 1 + 1/\log Y$, 则得(应用当 $N = 4$ 时的(5)式可得 $\sum_{n \geq 1} (\log n) n^{-\sigma} = O((\log Y)^2)$)

$$\begin{aligned} \psi(Y, \chi) &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\sigma-iT''}^{\sigma+iT'} \frac{Y^s}{s} \cdot \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} ds + O(TY N^{1-\sigma} (\log Y)^2 \log N) \\ &\quad + O\left(\frac{Y}{T} (\log Y)^2\right) + O\left(\frac{1}{T} Y \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma \left|\log \frac{Y}{n}\right|}\right). \end{aligned}$$

令 $N \rightarrow \infty$, 则有

$$\begin{aligned} \psi(Y, \chi) &= \frac{-1}{2\pi i} \int_{\sigma-iT''}^{\sigma+iT'} \frac{Y^s}{s} \cdot \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} ds \\ &\quad + O\left(\frac{Y}{T} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma \left|\log \frac{Y}{n}\right|}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma \left|\log \frac{Y}{n}\right|} = \sum_1 + \sum_2 + \sum_3,$$

其中 \sum_1 、 \sum_2 与 \sum_3 分别是无穷级数的满足 $n > 2Y$, $n < Y/2$ 与 $Y/2 \leq n \leq 2Y$ 的部分. 应用(5), 显然可得

$$\sum_1 \ll \sum_{n > 2Y} \frac{\log n}{n^\sigma} \ll (\log Y)^2.$$

又, 由 $\sum_{n < Y} n^{-1} \ll \log Y$ (见定理 1.3.6 的证明) 可得

$$\sum_2 \ll \sum_{n < Y} \frac{\log n}{n^\sigma} \ll \log Y \cdot \sum_{n \leq Y} \frac{1}{n} \ll (\log Y)^2.$$

对于 \sum_3 , 我们看到

$$\sum_3 \ll \frac{\log Y}{Y} \left(\sum_{\frac{Y}{2} \leq n < Y} \frac{1}{Y \log \frac{Y}{n}} + \sum_{Y < n \leq 2Y} \frac{1}{\log \frac{n}{Y}} \right).$$

由引理 1.6.3 可知, 当 $\frac{Y}{2} \leq n < Y$ 时

$$\log \frac{Y}{n} = \log \left(1 + \frac{Y-n}{n} \right) \geq \frac{Y-n}{Y},$$

所以

$$\sum_{\frac{1}{2}Y \leq n < Y} \frac{1}{Y \log \frac{Y}{n}} \leq Y \sum_{\frac{1}{2}Y \leq n < Y} \frac{1}{Y-n} \leq 2Y \sum_{1 \leq m \leq Y} \frac{1}{m} \ll Y \log Y.$$

类似地, 可得

$$\sum_{Y < n \leq 2Y} \frac{1}{\log \frac{n}{Y}} \ll Y \log Y.$$

所以, $\sum_3 \ll (\log Y)^2$. 又由于 \sum_1 与 \sum_2 的估计, 就得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^\sigma \left| \log \frac{Y}{n} \right|} \ll (\log Y)^2.$$

因此, (4) 及 (6) 得

$$\psi(x, \chi) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - iT}^{\sigma + iT} F(s) ds + O\left(\frac{Y}{T} (\log Y)^2\right), \quad (7)$$

其中 $F(s) = \frac{Y^s}{s} \cdot \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)}$. 在定理 1.5.12 的证明中, 我们已分析过, 在 $L(s, \chi)$ 的一个 h 阶零点 z 附近 ($s \neq z$)

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \frac{h}{s-z} + g(s),$$

而 $g(s)$ 在 $s = z$ 处解析. 因此, 若在 $\chi(-1) = 1$ 时令 $\delta = 0$, 在

$\chi(-1) = -1$ 时令 $\delta = 1$, 则函数 $L'(s, \chi)/L(s, \chi)$ 的极点为 $L(s, \chi)$ 的所有平凡零点 $-\delta - 2n$ (n 为非负整数) 和所有非平凡零点 z_m ($m = 1, 2, \dots$), 且都是单阶极点。在复 s 平面上, 令 $A = \sigma - iT''$, $B = \sigma + iT'$, $C = -1/2 + iT'$, $D = -1/2 - iT''$, 并用 \overline{AB} 表示由 A 至 B 的直线段, 并以此类推。显然, $F(s)$ 在以 A, B, C, D 为顶点的矩形区域内部 E (E 为开集) 为亚纯函数, 且具有极点 0 以及有限个 $L(s, \chi)$ 的非平凡零点 z_m 。因此, 由残数定理可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{AB}} F(s) ds &= a_0 + \sum_{z_m \in E} a_{z_m} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{BC}} F(s) ds \\ &\quad - \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{CD}} F(s) ds - \frac{1}{2\pi i} \int_{\overline{DA}} F(s) ds, \end{aligned} \quad (8)$$

其中 a_0 和 a_{z_m} 分别表示 $F(s)$ 在 $s = 0$ 处和 $s = z_m$ 处的残数。由定理 1.5.10 的 (iii)、(v) 以及 T' 的选取, 可知当 $s \in \overline{BC}$ 时,

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = O((\log(qT))^2),$$

所以

$$\int_{\overline{BC}} F(s) ds = O\left(\frac{x}{T} (\log(qT))^2\right). \quad (9)$$

同理可得

$$\int_{\overline{DA}} F(s) ds = O\left(\frac{X}{T} (\log(qT))^2\right). \quad (10)$$

当 $s = \beta + iT \in \overline{CD}$ 时, 由定理 1.5.10 的 (v), 我们有

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = O\left(\sum_{|t-r_n| < 1} 1\right) + O(\log(q(|t| + 2))) = O(\log(qT)),$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{\overline{CD}} F(s) ds &= O\left(x^{-1/2} \left(\int_{-T''}^{T'} \frac{1}{|t| + 1} dt\right) \log(qT)\right) \\ &= O(x^{-1/2} (\log(qT))^2). \end{aligned} \quad (11)$$

为计算 a_0 , 设 $s \neq \rho_n$, $s \neq -\delta - 2n$ ($n \geq 0$, n 为整数), 这里 δ 与

定理 1.3.5 的(i) 中同样地定义, 即当 $\chi(-1) = 1$ 时, $\delta = 0$, 而当 $\chi(-1) = -1$ 时, $\delta = 1$ 。由推论 1.4.7(应用两次, 并相减) 可得

$$\begin{aligned} \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} &= \frac{L'(2, \chi)}{L(2, \chi)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'\left(\frac{s+\delta}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right)} - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2 - z_n} - \frac{1}{s - z_n} \right). \quad (12) \end{aligned}$$

当 $\delta = 0$ 时, 0 为 $F(s)$ 的 2 阶零点。由定理 1.1.5 的(v) 可知, 当 $s \neq 0$ 且 s 不位于负实轴上时,

$$\frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)} = \log(s+1) - \frac{1}{2(s+1)} - \frac{1}{s} + 2 \int_1^\infty \frac{\sigma(x) dx}{(s+x)^3}. \quad (13)$$

但是不难看出, (13) 式两边的函数在复 s 平面的开连通集

$$\Omega = \left\{ s \mid 0 < |s| < \min\left(\frac{|z_1|}{2}, \frac{1}{2}\right) \right\}$$

中都为解析函数(对于 Γ'/Γ , 可应用定理 1.1.5 的(i)、(ii) 及 (iii), 而对于(13) 式右端的积分, 则可应用引理 1.1.1 的(ii) 的类似证法证明它在集合 $\{s \mid |s| < \frac{1}{2}\}$ 内解析)。因此, 由解析开拓可知(13) 式在 Ω 上成立。由(12) 式与(13) 式可得, 当 $s \in \Omega$ 时

$$\frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} = \frac{1}{s} + g(s), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{L'(2, \chi)}{L(2, \chi)} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} - \frac{1}{2} \log\left(\frac{s}{2} + 1\right) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+1} \\ &\quad - \int_1^\infty \frac{\sigma(x) dx}{(s+x)^3} - \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{2 - z_n} - \frac{1}{s - z_n} \right). \quad (15) \end{aligned}$$

应用引理 1.4.3, 可知(15) 式右边的无穷级数在 $s = 0$ 处解析, 因此 g/s 在 $\{s \mid |s| < \min(\frac{1}{2}|z_1|, \frac{1}{2})\}$ 中的解析。由定义及(14) 与

(15), 我们得

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \lim_{s \rightarrow 0} (F(s)s^2)' = \lim_{s \rightarrow 0} \left(Y^s \cdot s \cdot \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right)'_s \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(Y^s \cdot s \cdot \left(\frac{1}{s} + g(s) \right) \right)'_s = \lim_{s \rightarrow 0} (Y^s(1 + sg(s)))'_s \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} (Y^s \log Y(1 + sg(s)) + Y^s(g(s) + sg'(s))) \\
 &= \log Y + g(0) = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{z_n - 2} - \frac{1}{z_n} \right) + O(\log x). \quad (16)
 \end{aligned}$$

当 $\delta = 1$ 时, 0 为 $F(s)$ 的 1 阶零点. 由此由 (12) 式可得

$$a_0 = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \frac{L'(0, \chi)}{L(0, \chi)} = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{z_n - 2} - \frac{1}{z_n} \right) + O(1). \quad (17)$$

由 (16) 及 (18), 我们总有

$$a_0 = \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{z_n - 2} - \frac{1}{z_n} \right) + O(\log x). \quad (18)$$

若设 $z_n = \beta_n + ir_n$, 则由定理 1.5.10 的 (i) 可得

$$\sum_{\substack{n \geq 1 \\ |r_n| \geq 1}} |z_n(z_n - 2)|^{-1} \leq \sum_{|r_n| \geq 1} r_n^{-2} \leq \sum_{n \geq 1} \frac{2}{1 + r_n^2} \ll \log q. \quad (19)$$

由推论 1.4.7 的证明过程可知, 若 $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ 为 $L(s, \chi)$ 的所有非平凡零点按绝对值上升的顺序的一个排列, 则 $1 - z_1, 1 - \bar{z}_2, \dots, 1 - \bar{z}_n, \dots$ 为 $L(s, \chi)$ 的所有非平凡零点的一个排列. 因此, 若 $z_n = \beta_n + ir_n$ 为 $L(s, \chi)$ 的一个非平凡零点, $|r_n| < 1$, 且使得 $1 - \bar{z}_n$ 不为 Q -例外零点 (无论其存在与否; 定义见定理 1.5.2), 则有

$$\beta_n = 1 - \operatorname{Re}(1 - \bar{z}_n) > \frac{c_2}{\log(3Q)}.$$

由此, 应用定理 1.5.10 的 (iii) 的 (b), 可得

$$\sum_{|r_n| < 1} ' |z_n(z_n - 2)|^{-1} \ll \sum_{|r_n| < 1} ' |z_n|^{-1} \ll \sum_{|r_n| < 1} ' \beta_n^{-1}$$

$$\ll (\log Q)^2, \quad (20)$$

这里'表示 $1 - \bar{z}_n$ 不为 Q -例外零点。若 Q -例外零点 $\tilde{\beta}$ 存在,则由定理 1.5.2 可知

$$1 - \tilde{\beta} \leq \frac{c_2}{\log(2Q)} < \frac{1}{2}, \quad (21)$$

所以 $\tilde{\beta} > \frac{1}{2} > 1 - \tilde{\beta}$, 因此 $\tilde{\beta}$ 已经包含在(20)式左边的求和中。由(18)、(19)及(20),我们有

$$\begin{aligned} a_0 &= \theta \left(-\frac{1}{\tilde{\beta} + 1} - \frac{1}{1 - \tilde{\beta}} \right) + O(\log x) + O((\log Q)^2) \\ &= -\frac{\theta}{1 - \tilde{\beta}} + O((\log x)^2). \end{aligned} \quad (22)$$

在定理 1.5.12 的证明中,我们已指出:若 z 为 $L(s, \chi)$ 的位于以 A, B, C, D 为顶点的矩形内的一个 h 阶零点,则 z 为函数 $L'(s, \chi)/L(s, \chi)$ 的1阶极点,残数为 h 。由此易得

$$\begin{aligned} a_{z_m} &= \lim_{s \rightarrow z_m} ((s - z_m) F(s)) \\ &= \frac{1}{z_m} Y^{z_m} \cdot \lim_{s \rightarrow z_m} \left((s - z_m) \cdot \frac{L'(s, \chi)}{L(s, \chi)} \right) = \frac{h Y^{z_m}}{z_m}. \end{aligned} \quad (23)$$

由(7)~(11)、(22)和(23),可得

$$\psi(x, \chi) = \frac{\theta}{1 - \tilde{\beta}} - \sum_1 \frac{1}{\rho} Y^\rho = O\left(\frac{x}{T} (\log(xQ))^2\right), \quad (24)$$

这里 \sum_1 表示对 $L(s, \chi)$ 满足 $-T'' < r_n < T'$ 的非平凡零点 $\rho_n = \beta_n + i r_n$ 求和,其中一个 h 阶零点被重复计数了 h 次, $h \geq 1$ 。当 Q -例外零点 $\tilde{\beta}$ 存在,即 $\theta = 1$ 时, $\tilde{\beta}$ 及 $1 - \tilde{\beta}$ 各被计数于 \sum_1 中1次。由Cauchy 中值定理可知存在 $\xi \in (0, 1 - \tilde{\beta})$,使得

$$\frac{Y^{1-\tilde{\beta}} - 1}{1 - \tilde{\beta}} = \frac{e^{(1-\tilde{\beta}) \log Y} - 1}{1 - \tilde{\beta}} = (\log Y) \cdot e^{\xi \log Y}$$

$$\leq (\log Y) \cdot e^{(1-\tilde{\beta})\log Y} = O(x^{1/2} \log x); \quad (25)$$

这里我们应用了(21)。由于 $T \leq T', T'' \leq T+1$, 应用定理 1.5.10 的(iii) 的(a), 我们得

$$\begin{aligned} \sum_2 \frac{1}{\rho} Y^\rho &= \sum_3 \frac{1}{\rho} Y^\rho + O\left(\frac{x}{T} \sum_{T \leq |r_n| \leq T+1} 1\right) \\ &= \sum_3 \frac{1}{\rho} Y^\rho + O\left(\frac{x}{T} \log(qT)\right), \end{aligned} \quad (26)$$

这里 \sum_2 表示对于满足 $\rho_n = \beta_n + ir_n, -T'' \leq r_n \leq T', \rho_n \neq \tilde{\beta}, 1 - \tilde{\beta}$ (若 $\tilde{\beta}$ 存在) 的非平凡零点 ρ_n 求和, \sum_3 对于满足 $\rho_n = \beta_n + ir_n, |r_n| \leq T, \rho_n \neq \tilde{\beta}, 1 - \tilde{\beta}$ (若 $\tilde{\beta}$ 存在) 的非平凡零点 ρ_n 求和。当 s 为实数, 且 $s \neq 0$ 时, 若 $x_2 > x_1 > 0$, 则由实函数积分, 显然有

$$x_2^s - x_1^s = s \int_{x_1}^{x_2} u^{s-1} du, \quad (27)$$

其中对于正数 ξ, ξ^s 定义为 $e^{s \log \xi}$, 对数值取主分支。若允许 s 取复数, 显然(27) 左边作为 s 的函数是整函数, 而应用引理 1.1.1 类似的证法, 可知(27) 右边的函数也为 s 的整函数(这时积分仍是沿从 x_1 到 x_2 的直线段取的), 因此由解析开拓可知(27) 总成立。特别地, 当 ρ 被计数于 \sum_3 中时, 我们得

$$Y^\rho - x^\rho = \rho \int_x^Y u^{\rho-1} du \ll |\rho| \left| \int_Y^x u^{\beta-1} du \right| \ll |\rho| \cdot x^{\beta-1} \ll |\rho|,$$

因此, 由定理 1.5.10 的(iii) 的(b), 我们得

$$\sum_3 \frac{1}{\rho} Y^\rho = \sum_3 \frac{1}{\rho} x^\rho + O(T \log(qT)). \quad (28)$$

由(24) ~ (26) 以及(28), 当 $3 \leq T \leq \sqrt{x}$ 时, 我们有

$$\psi(x, \chi) = -\theta \frac{1}{\tilde{\beta}} x^{\tilde{\beta}} - \sum' \frac{1}{\rho} x^\rho + O\left(\frac{x}{T} (\log(Qx))^2\right),$$

其中 \sum' 表示对于满足 $|\operatorname{Im} \rho| \leq T, \rho \neq \tilde{\beta}, 1 - \tilde{\beta}$ (若 $\tilde{\beta}$ 存在) 的

$L(s, \chi)$ 的非平凡零点求和。这就证明了(i)。

(ii) 可与(i)类似地加以证明, 这时我们的出发点为(见引理 1.5.1 的(iii) 的证明)

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}, \quad \text{Re } s > 1,$$

并相应地要应用定理 1.5.11、引理 1.6.2、引理 1.6.3、残数定理、推论 1.4.9 以及定理 1.3.5 的(ii)。所需额外注意者为, 在运用残数定理时(相应于(8)), 若令 $F(s) = x^s \zeta'(s) / (s \zeta(s))$, 则 $F(s)$ 以 $s = 1$ 为 1 阶极点, 且相应的残数为 $-x$ 。这是因为, 由定理 1.3.5 的(ii) 可知, 存在在 $\{s \mid |s| < 2\}$ 中解析的函数 $G(s)$, 使得当 $s \neq 1$ 时, $G(s) = (s-1)\zeta(s)$, 且 $G(1) \neq 0$ 。于是, 当 $s \neq 1, |s| < 2$ 时,

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{G'(s)}{G(s)} - \frac{1}{s-1},$$

由此即得所需结论(实际上, 我们可扩充定义 $G(s)$ 成为一个整函数)。另外 $F(s)$ 在 $s = 0$ 处的残数为 $\zeta'(0)/\zeta(0)$ 。这就使得在(i) 中相应于 $\psi(x, \chi)$ 所作的讨论(12) ~ (22) 以及(25) 在(ii) 中对于 $\psi(x)$ 而言成为不必要的了。

(iii) 若 $\rho = \beta + i\gamma$ 为 $\zeta(s)$ 的任一个非平凡零点, 则由引理 1.5.9 可知必有 $|\gamma| > 1$ (见定理 1.5.8 的证明过程)。由定理 1.5.8 可知, 若 $|\gamma| \leq T$, 则有

$$1 - \beta > \frac{c_{16}}{\log(T+2)}.$$

因此, 若取 $T = \exp\left(\sqrt{\frac{c_{16}}{2}}(\log x)^{1/2}\right)$, 则由(ii) 及定理 1.5.14 的(ii) 的(b) 可得

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = x + O\left(\sum_{|\gamma| \leq T} x^{\beta}\right) + O(xT^{-1}(\log x)^2)$$

$$\begin{aligned}
 &= x + O(e^{-\sqrt{2c_{16}}} \sum_{\gamma \leq T} 1) + O(xT^{-1}(\log x)^2) \\
 &= x + O\left(x \exp\left(-\sqrt{\frac{1}{2}c_{16}}(\log x)^{1/2}\right)(\log x)^2\right).
 \end{aligned}$$

因此,只要 λ_1 是大于 $\sqrt{\frac{1}{2}c_{16}}$ 的常数, (iii) 就成立。

(iv) 与 (1) 类似地, 我们可得

$$\begin{aligned}
 \pi(x) &= \sum_{\sqrt{x} \leq n \leq x} \psi(n) \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right) + \frac{\psi([x])}{\log([x]+1)} \\
 &\quad + O(x^{1/2} \log x). \quad (29)
 \end{aligned}$$

由于 (iii) 中的 x 是任意的, 因此由 (29) 及 (iii) 可得

$$\begin{aligned}
 \pi(x) &= \sum_{\sqrt{x} \leq n \leq x} (n + O(n \exp(-\lambda_1(\log n)^{1/2}))) \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right) \\
 &\quad + \frac{[x]}{\log([x]+1)} + O(x \exp(-\lambda_1(\log x)^{1/2})) \\
 &= \sum_{\sqrt{x} \leq n \leq x} \frac{n}{\log n} - \sum_{\sqrt{x}+1 \leq n \leq x+1} \frac{n-1}{\log n} + \frac{[x]}{\log([x]+1)} \\
 &\quad + O\left(x \exp\left(-\frac{\lambda_1}{\sqrt{2}}(\log x)^{1/2}\right)\right) \\
 &= \sum_{\sqrt{x} \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} + O\left(x \exp\left(-\frac{\lambda_1}{\sqrt{2}}(\log x)^{1/2}\right)\right);
 \end{aligned}$$

这里已用到了 $\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} = O\left(\frac{1}{n(\log n)^2}\right)$ 。应用推论

1.1.4, 可得

$$\sum_{\sqrt{x} \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} = \int_{\sqrt{x}}^x \frac{du}{\log u} + O\left(\frac{1}{\log x}\right) = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(\sqrt{x}).$$

因此, (iv) 成立, 且可取 $\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_1$ 。

(v) 由 (2), 我们知道

$$\psi(x; q, a) = \frac{1}{\varphi(q)} \psi(x, \chi_0) + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(a) \psi(x, \chi), \quad (30)$$

这里 χ_0 为模 q 的主特征。由(ii) 我们有

$$\begin{aligned}\psi(x, \chi_0) &= \psi(x) + O((\log x)^2) \\ &= x + O(x \exp(-\lambda_1(\log x)^{1/2})).\end{aligned}\quad (31)$$

设模 q 的非主特征 χ 由模 q_1 的原特征 χ_1 所诱导, 即 $\chi = \chi \chi_0$, 则由(3) 及(i)(在其中将 (χ, q, Q) 换成 (χ_1, q_1, q)), 我们有

$$\begin{aligned}\psi(x, \chi) &= \psi(x, \chi_1) + O(\log x \cdot \log q) \\ &= -\theta \cdot \frac{1}{\tilde{\beta}} x^{\tilde{\beta}} - \sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T} ' \frac{1}{\rho} x^{\rho} + O\left(\frac{x}{T} (\log(qx))^2\right),\end{aligned}\quad (32)$$

其中 $3 \leq T \leq \sqrt{x}$, $\theta = 1$ 或 0 视是否存在 q -例外零点 $\tilde{\beta}$ 而定(若 $\theta = 1$, 则 (χ_1, q_1) 即为 q -例外对 $(\tilde{\chi}, \tilde{q})$, 见定理 1.5.2), 对 ρ 的求和通过 $L(s, \chi_1)$ 所有满足 $|\operatorname{Im} \rho| \leq T$ 以及 $\rho \neq \tilde{\beta}, 1 - \tilde{\beta}$ (若 $\tilde{\beta}$ 存在) 的非平凡零点 ρ 。若将计数于 $\sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T} ' \rho$ 中的任一个零点记为 $\rho = \beta + i\gamma$, 则由定理 1.5.2 可知

$$1 - \beta > \frac{c_2}{\log(q(T+2))}. \quad (33)$$

由推论 1.4.7 的证明, 我们知道 $1 - \bar{\rho} = 1 - \beta + i\gamma$ 也为 $L(s, \chi_1)$ 的零点, 且由 $\rho \neq 1 - \tilde{\beta}$ 可知 $1 - \bar{\rho} \neq \tilde{\beta}$ 。所以, 由定理 1.5.2 又得

$$\beta = 1 - \operatorname{Re}(1 - \bar{\rho}) > \frac{c_2}{\log(q(T+2))}. \quad (34)$$

由(33)、(34) 以及定理 1.5.10(iii)(b), 我们得

$$\begin{aligned}\sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T} ' \frac{1}{\rho} x^{\rho} &= O\left(x \cdot \log(qT) \cdot \exp\left(\frac{-c_2 \log x}{\log(q(T+2))}\right) \left(\sum_{|\gamma| \leq T} 1\right)\right) \\ &= O\left(x T (\log(qT))^2 \exp\left(\frac{-c_2 \log x}{\log(q(T+2))}\right)\right). \quad (35)\end{aligned}$$

当 $0 < \delta < 2/3$, $3 \leq q \leq (\log x)^{2-3\delta}$ 时, 令 $T = \exp\left(\left(\frac{1}{2} c_2 \log x\right)^{1/2}\right)$, 则由(35) 得

$$\sum_{|\operatorname{Im} \rho| \leq T} \frac{1}{\rho} x^{\rho} = O\left(x \exp\left(-\frac{1}{2}(c_2 \log x)^{1/2}\right)\right). \quad (36)$$

当 $\theta = 1$ 时, 由定理 1.5.13 可知

$$\begin{aligned} \tilde{\beta} - 1 &< -c(\delta) q^{-1/2-\delta/4} < -c(\delta)(\log x)^{(2-3\delta)(-1/2-\delta/4)} \\ &< -c(\delta)(\log x)^{-1+\delta+3\delta^2/4}, \end{aligned}$$

因此, 再由 (21) 就得到

$$\frac{1}{\tilde{\beta}} x^{\tilde{\beta}} = O(x \cdot x^{\tilde{\beta}-1}) = O(x \exp(-c(\delta)(\log x)^{\delta})). \quad (37)$$

由 (32)、(36) 及 (37), 在 $0 < \delta < 1/2$ 及 $x \geq x_0(\delta) > 0$ 时, 就有 $c_1(\delta) > 0$, 使得

$$\psi(x, \chi) = O(x \exp(-c_1(\delta)(\log x)^{\delta})).$$

(vi) 注意: (v) 中的 x 可被换成任何大于 $x_0(\delta)$ 的数。因此, 当

$3 \leq q \leq (\log x)^{2-3\delta}$, $x \geq (x_0(\delta))^2$ 时, 由 (v) 及 (1) 我们有

$$\begin{aligned} \pi(x; q, a) &= \sum_{\sqrt{x} \leq n \leq x} \left(\frac{n}{\varphi(q)} + O(n \exp(-c_1(\delta)(\log n)^{\delta})) \right) \\ &\quad \cdot \left(\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)} \right) \\ &\quad + \left(\frac{[x]}{\varphi(q)} + O(x \exp(-c_1(\delta)(\log x)^{\delta})) \right) \\ &\quad \cdot \frac{1}{\log([x]+1)} + O(x^{1/2} \log x) \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \left(\sum_{\sqrt{x} \leq n \leq x} \frac{n}{\log n} - \sum_{\sqrt{x}+1 \leq n \leq x+1} \frac{n-1}{\log n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{[x]}{\log([x]+1)} \right) + O(x \exp(-\frac{1}{2} c_1(\delta)(\log x)^{\delta})) \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \left(\sum_{\sqrt{x} \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} \right) \\ &\quad + O(x \exp(-\frac{1}{2} c_1(\delta)(\log x)^{\delta})). \end{aligned}$$

在证明(iv)的过程中,我们已证明

$$\sum_{\sqrt{x} \leq n \leq x} \frac{1}{\log n} = \int_2^x \frac{du}{\log u} + O(x^{1/2}).$$

因此,(vi)成立。证毕。

定理 1.6.1 的(i)通常被称为显式(explicit formula),因为在公式中明显地包含着 $L(s, \chi)$ 的除 $1 - \tilde{\beta}$ 之外(若 Q -例外零点 $\tilde{\beta}$ 存在)的全部非平凡零点。类似地,(ii)也被称为显式。(iv)通常被称为素数定理(有时也这样称呼(iii))。

定理 1.6.1 的(iii)及(iv)中的余项还可以应用指数和估计及函数论中的方法加以改进。

练 习

(I) 给出定理 1.6.1 的(ii)的详细证明。

(II) 应用定理 1.6.1 的(iii)和引理 1.1.3 证明:若 $x \geq 3$, 则

$$\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + \delta_1 + O(\exp(-\delta_2(\log x)^{\frac{1}{2}})),$$

其中 δ_1 与 δ_2 为绝对常数,特别地 $\delta_2 = \frac{1}{2}\lambda_1 > 0$, λ_1 为定理 1.6.1 的(iii)中的常数。

第二章

大筛法与 L 函数的零点密度估计

历史上,大筛法的出现是为了研究与素数有关的问题。

§ 2.1 大筛法

考虑以复数为纯量的线性赋范空间 P , 其元素是 N 维向量 (N 为正整数), 即 (x_1, \cdots, x_N) , 其中 x_i 为任意的复数。对任意的复数 α 与 β , 及任意元素 $x, y \in P$,

$$x = (x_1, \cdots, x_N), y = (y_1, \cdots, y_N),$$

元素 $\alpha x + \beta y$ 定义为 $(\alpha x_1 + \beta y_1, \cdots, \alpha x_N + \beta y_N)$, 元素 x 与 y 的内积 (x, y) 为一个复数,

$$(x, y) = x_1 \bar{y}_1 + \cdots + x_N \bar{y}_N,$$

这里 \bar{y}_1 表示 y_1 的共轭复数。特别地, 元素 $x = (x_1, \cdots, x_N)$ 的范数定义为

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_N|^2}.$$

显然, $\|x\| \geq 0$, 并且 $\|x\| = 0$ 当且仅当 $x_1 = \cdots = x_N = 0$, 即 $x = (0, \cdots, 0)$ 为 P 中零元素。所谓大筛法 (the large sieve), 粗略地说, 即是关于线性赋范空间 P 中若干元素内积的绝对值之和或绝对值平方之和的一些适当的上界估计 (因此, “大筛法” 与通常所说的 “筛法” 并无直接的关系)。这里我们将要证明几个大筛法型的不等式。在建立这些不等式的过程中, 所利用的基本事实为

$\|x\| \geq 0$ 对每个 $x \in P$ 成立。

我们有

定理 2.1.1 (i) 设 ξ 和 ψ_1, \dots, ψ_R 为 P 中任意的 N 维向量, R 为任意正整数, 则

$$\sum_{r=1}^R |(\xi, \psi_r)|^2 \leq \max_{1 \leq r \leq R} \left(\sum_{s=1}^R |(\psi_r, \psi_s)| \right) \cdot \|\xi\|^2.$$

(ii) 设 B 为由形如 (q, χ, s) 的元素组成的一个有限集合, 其中 q 为正整数, χ 为模 q 的特征, s 为适当的复数, 又设 ϕ_n 及 $\lambda_{n,q}$ 为任意的复数, $1 \leq n \leq N$, 并且

$$H(q, \chi, s) = \sum_{n=1}^N \phi_n \lambda_{n,q} \chi(n) n^{-s}.$$

则对于任意的正数 b_1, \dots, b_N , 成立着

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{(q, \chi, s) \in B} |H(q, \chi, s)| \right)^2 \\ & \leq \left(\sum_{n=1}^N |\phi_n|^2 b_n^{-1} \right) \cdot \left(\sum_{(q, \chi, s) \in B} \sum_{(q', \chi', s') \in B} \left| \sum_{n=1}^N b_n \bar{\lambda}_{n,q} \chi(n) \bar{\chi}'(n) \chi'(n) n^{-s-s'} \right| \right). \end{aligned}$$

证明: (i) 设 ψ_1, \dots, ψ_R 为一组 P 中元素, u_1, \dots, u_R 为任意一组复数。则

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{1 \leq r \leq R} u_r \psi_r \right\|^2 &= \sum_{1 \leq r \leq R} \sum_{1 \leq s \leq R} u_r \bar{u}_s (\psi_r, \psi_s) \\ &\leq \sum_{1 \leq r \leq R} \sum_{1 \leq s \leq R} |u_r \bar{u}_s| |(\psi_r, \psi_s)| \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{1 \leq r \leq R} \sum_{1 \leq s \leq R} (|u_r|^2 + |u_s|^2) |(\psi_r, \psi_s)| \\ &= \sum_{1 \leq r \leq R} |u_r|^2 \sum_{1 \leq s \leq R} |(\psi_r, \psi_s)| \\ &\leq A \cdot \left(\sum_{1 \leq r \leq R} |u_r|^2 \right), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $A = \max_{1 \leq r \leq R} \left(\sum_{1 \leq s \leq R} |(\psi_r, \psi_s)| \right)$ 。对于任取的 P 中元素 ξ 与 x ,

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N), x = (x_1, \dots, x_N),$$

我们有

$$\begin{aligned} 0 \leq (\xi - x, \xi - x) &= \|\xi - x\|^2 = \sum_{i=1}^N |\xi_i - x_i|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N (|\xi_i|^2 - 2\operatorname{Re}(\xi_i \bar{x}_i) + |x_i|^2) \\ &= \|\xi\|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\sum_{i=1}^N \xi_i \bar{x}_i\right) + \|x\|^2 \\ &= \|\xi\|^2 - 2\operatorname{Re}(\xi, x) + \|x\|^2. \end{aligned}$$

特别地, 令 $x = \sum_{r=1}^R u_r \psi_r$, 则由

$$(\xi, x) = \sum_{r=1}^R \bar{u}_r (\xi, \psi_r),$$

可得

$$2\operatorname{Re}\left(\sum_{r=1}^R \bar{u}_r (\xi, \psi_r)\right) \leq \|\xi\|^2 + \left\|\sum_{r=1}^R u_r \psi_r\right\|^2. \quad (2)$$

由(1)及(2), 我们得

$$2\operatorname{Re}\left(\sum_{r=1}^R \bar{u}_r (\xi, \psi_r)\right) \leq \|\xi\|^2 + A\left(\sum_{1 \leq r \leq R} |u_r|^2\right), \quad (3)$$

其中 $A = \max_r \left(\sum_{1 \leq s \leq R} |(\psi_r, \psi_s)|\right) \geq \max_r \|\psi_r\|^2$. 若 $\sum_{1 \leq r \leq R} \|\psi_r\| > 0$,

则 $A > 0$. 在(3)中选取 $u_r = (\xi, \psi_r)/A$, 则易得

$$\frac{2}{A} \left(\sum_{r=1}^R |(\xi, \psi_r)|^2\right) \leq \|\xi\|^2 + \frac{1}{A} \sum_{r=1}^R |(\xi, \psi_r)|^2,$$

由此可证得(i). 若 $\sum_{1 \leq r \leq R} \|\psi_r\| = 0$, 则每个 ψ_r 为零元素, 因此(i)

显然成立。

(ii) 由(1)的推导及(2)我们有

$$2\operatorname{Re}\left(\sum_{r=1}^R \bar{u}_r (\xi, \psi_r)\right) \leq \|\xi\|^2$$

$$+ \sum_{r=1}^R |u_r|^2 \left(\sum_{s=1}^R |(\psi_r, \psi_s)| \right). \quad (4)$$

设 $(\xi, \psi_r) = |(\xi, \psi_r)| e^{i\theta_r}$, 这里 θ_r 为实数, 在 $(\xi, \psi_r) = 0$ 时无妨取 $\theta_r = 0$. 先设 $\sum_{1 \leq r \leq R} \|\psi_r\| > 0$, 在 (4) 中选取 $(1 \leq r \leq R)$

$$u_r = \|\xi\| \exp(i\theta_r) B^{-1/2}, B = \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^R |(\psi_r, \psi_s)|$$

则可得

$$\begin{aligned} 2 \|\xi\| B^{-1/2} \left(\sum_{r=1}^R |(\xi, \psi_r)| \right) &\leq \|\xi\|^2 + \|\xi\|^2 B^{-1} \cdot B \\ &= 2 \|\xi\|^2, \end{aligned}$$

由此可知, 当 $\|\xi\| \neq 0$ 时,

$$\sum_{r=1}^R |(\xi, \psi_r)| \leq \|\xi\| \cdot B^{1/2}, B = \sum_{r=1}^R \sum_{s=1}^R |(\psi_r, \psi_s)|. \quad (5)$$

当 $\|\xi\| = 0$ 时, ξ 为 P 中的零元素 $(0, \dots, 0)$, 因此式 (5) 仍成立. 若 $\sum_{1 \leq r \leq R} \|\psi_r\| = 0$, 则每个 ψ_r 都为零元素, 所以式 (5) 总成立. 按照 (ii) 的假设, 设 q 为正整数, χ 为模 q 的特征, s 为适当的复数, (q, χ, s) 属于一个适当的有限集合 B , 并令

$$H(q, \chi, s) = \sum_{n=1}^N \phi_n \lambda_{n,q} \chi(n) n^{-s},$$

其中 ϕ_n 及 $\lambda_{n,q}$ 为复数. 若 b_1, \dots, b_N 为一组正数, 则

$$H(q, \chi, s) = (\xi, \psi(q, \chi, s)),$$

其中 $(\xi, \psi(q, \chi, s))$ 表示 P 中的元素 ξ 与 $\psi(q, \chi, s)$ 的内积, 而

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N), \psi(q, \chi, s) = (\beta_1, \dots, \beta_N),$$

这里 $\xi_k = \phi_k b_k^{-1/2}$, $\beta_k = \beta_k(q, \chi, s) = \overline{\lambda_{k,q}} \phi_k^{1/2} \overline{\chi(k)} k^{-s}$, $1 \leq k \leq N$, $\overline{\chi}$ 和 \overline{s} 分别表示共轭特征与共轭复数. 设 B 中共有 R 个元素, 它们排序为 $(q_1, \chi_1, s_1), \dots, (q_R, \chi_R, s_R)$. 则由 (5) 我们得

$$\left(\sum_{(q, \chi, s) \in B} |H(q, \chi, s)| \right)^2 = \left(\sum_{r=1}^R |(\xi, \psi(q_r, \chi_r, s_r))| \right)^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{k=1}^N |\phi_k|^2 b_k^{-1} \right) \left(\sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^R |(\psi(q_r, \chi_r, s_r), \psi(q_t, \chi_t, s_t))| \right) \\
&= \left(\sum_{k=1}^N |\phi_k|^2 b_k^{-1} \right) \cdot \left(\sum_{(q, \chi, s) \in B} \sum_{(q', \chi', s') \in B} \left| \sum_{n=1}^N \bar{\chi}_{n, q} \chi_{n, q'} b_n \bar{\chi}(n) \chi'(n) n^{-s-s'} \right| \right).
\end{aligned}$$

(ii) 证毕。

引理 2.1.2 设 J 为正整数, α 为任意实数, $e(\xi) = \exp(2\pi i\xi)$, 则

$$\sum_{|j| \leq J} (J - |j|) e(j\alpha) = \left| \sum_{j=1}^J e(j\alpha) \right|^2 = \left(\frac{\sin(\pi J\alpha)}{\sin(\pi\alpha)} \right)^2,$$

其中当 α 为整数时, $\sin(\pi J\alpha)/\sin(\pi\alpha)$ 应理解为极限值, 即

$$\frac{\sin(\pi J\alpha)}{\sin(\pi\alpha)} = \lim_{\beta \rightarrow \alpha} \frac{\sin(\pi J\beta)}{\sin(\pi\beta)} = J.$$

证明: 显然

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^J e(j\alpha) \right|^2 &= J + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq J} e((j_1 - j_2)\alpha) + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq J} e((j_2 - j_1)\alpha) \\
&= J + \sum_{1 \leq j \leq J-1} e(-j\alpha) \left(\sum_{\substack{j_2 - j_1 = j \\ 1 \leq j_1 < j_2 \leq J}} 1 \right) + \sum_{1 \leq j \leq J-1} e(j\alpha) \left(\sum_{j_2 - j_1 = j} 1 \right) \\
&= J + \sum_{1 \leq j \leq J-1} (J - j) e(-j\alpha) + \sum_{1 \leq j \leq J-1} (J - j) e(j\alpha) \\
&= J + \sum_{1 \leq |j| \leq J-1} (J - |j|) e(j\alpha) \\
&= \sum_{|j| \leq J} (J - |j|) e(j\alpha),
\end{aligned}$$

并且, 当 α 不为整数时,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j=1}^J e(j\alpha) \right| &= \left| \frac{1 - e(J\alpha)}{1 - e(\alpha)} \right| = \left| \frac{e\left(-\frac{J\alpha}{2}\right) - e\left(\frac{J\alpha}{2}\right)}{e\left(-\frac{\alpha}{2}\right) - e\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \right| \\
&= \left| \frac{\sin(\pi J\alpha)}{\sin(\pi\alpha)} \right|, \tag{6}
\end{aligned}$$

而当 α 为整数时, 由于 $\frac{\sin(\pi J\alpha)}{\sin(\pi\alpha)}$ 的值已定义成了极限值 J , 可知

(6) 仍成立。证毕。

定理 2.1.3 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_R$ 为任意一组满足当 $r \neq s$ 时

$$\|\alpha_r - \alpha_s\| \geq \delta > 0$$

的实数, 这里 $\|\lambda\|$ 表示实数 λ 与距其最近的整数之间的距离。

设 $e(\xi) = \exp(2\pi i\xi)$ 。我们有

(i) 若 K 为正整数, A_n 为复数, $-K \leq n \leq K$, 则成立着

$$\sum_{r=1}^R \left| \sum_{n=-K}^K A_n e(n\alpha_r) \right|^2 \leq (2K+1+2\delta^{-1}) \left(\sum_{n=-K}^K |A_n|^2 \right).$$

(ii) 若 M 及 N 为整数, $N \geq 1$, a_n 为任意复数, $M+1 \leq n \leq$

$M+N$,

$$S(\alpha) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(n\alpha),$$

则

$$\sum_{r=1}^R |S(\alpha_r)|^2 \leq (N+2\delta^{-1}+\theta) \left(\sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2 \right),$$

其中若 N 为偶数, 则 $\theta = 1$, 若 N 为奇数, 则 $\theta = 0$ 。

证明: (i) 令 $L = [\delta^{-1}] + 1$, 则由 $\delta \leq 1/2$, 可知 $L \geq 3$ 。考虑 $N = 2(K+L) - 1$ 维向量 ξ 与 ϕ_1, \dots, ϕ_R , 它们定义为

$$\xi = (\xi_1, \dots, \xi_N), \phi_r = (\phi_r^{(1)}, \dots, \phi_r^{(N)}),$$

其中

$\xi_i = 0$, 若 $1 \leq i \leq L-1$ 或 $2K+L+1 \leq i \leq 2K+2L-1 = N$,

$\xi_i = A_{i-K-L} b_{i-K-L}^{-1/2}$, 若 $L \leq i \leq 2K+L$,

$$\phi_r^{(i)} = b_{i-K-L}^{1/2} e((i-K-L)\alpha_r), 1 \leq i \leq N, 1 \leq r \leq R,$$

而 b_k 则是一组正数, 定义为

$$b_k = \begin{cases} 1, & \text{当 } |k| \leq L \text{ 时,} \\ 1 - (|k| - K)/L, & \text{当 } K+1 \leq |k| \leq K+L-1 \text{ 时.} \end{cases}$$

由定理 2.1.1 的(i), 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^R \left| \sum_{n=-K}^K A_n e(n\alpha_r) \right|^2 &= \sum_{r=1}^R |(\xi, \psi_r)|^2 \\ &\leq A \cdot \left(\sum_{n=-K}^K |A_n|^2 b_n^{-1} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

其中

$$A = \max_{1 \leq r \leq R} \left(\sum_{1 \leq s \leq R} |B(\alpha_r - \alpha_s)| \right), \quad B(\alpha) = \sum_{|n| \leq N_1} b_n e(n\alpha),$$

而 $N_1 = K + L - 1$ 。对于实数 α , 我们有

$$\begin{aligned} B(\alpha) &= \sum_{|k| \leq K} e(k\alpha) + \frac{1}{L} \sum_{K+1 \leq |k| \leq N_1} (K + L - |k|) e(k\alpha) \\ &= \frac{1}{L} \sum_{|k| \leq K+L} e(k\alpha) - \frac{1}{L} \sum_{|k| \leq K} (K - |k|) e(k\alpha), \end{aligned}$$

因此由引理 2.1.2 可得

$$B(\alpha) = \frac{1}{L} [(\sin(\pi(K+L)\alpha))^2 - (\sin(\pi K\alpha))^2] (\sin(\pi\alpha))^{-2}.$$

由此可知, 当 α 为整数时

$$B(\alpha) = \frac{1}{L} ((K+L)^2 - K^2) = L + 2K, \quad (8)$$

而当 α 不为整数时, 应用当 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 时成立的不等式 $\sin \theta \geq 2\theta/\pi$, 可得

$$|B(\alpha)| \leq \frac{1}{L} (\sin(\pi\alpha))^{-2} = \frac{1}{L} (\sin(\pi \|\alpha\|))^{-2} \leq \frac{1}{4L} \|\alpha\|^{-2}. \quad (9)$$

对于给定的整数 $r, 1 \leq r \leq R$, 我们需要在 $s \neq r$ 及 $1 \leq s \leq R$ 时, 在某种意义上更精确地估计 $\|\alpha_r - \alpha_s\|$ 的下界(注意: 由假设已知 $\|\alpha_r - \alpha_s\| \geq \delta$), 这就需要给这些 α_s 适当地排序。为达此目的, 我们的想法是, 设法找个数 β_s , 使得 β_s 与 α_s 之差为整数, 且 $\beta_s \in (\alpha_r - 1/2, \alpha_r + 1/2]$, 因为这样就有 $\|\alpha_r - \alpha_s\| = \|\alpha_r - \beta_s\| = \|\alpha_r - \beta_s\|$ 。然后, 根据 β_s 的大小给 α_s 排序。这是可以办到

的, 因为区间 $(\alpha_r - 1/2 - \alpha_s, \alpha_r + 1/2 - \alpha_s]$ 中存在唯一的整数 $k_{s,r}$ 。我们令 $\beta_s = \alpha_s + k_{s,r}$, 则 $\alpha_r - 1/2 < \beta_s \leq \alpha_r + 1/2$ 。因为当 $s \neq r$ 时, $\|\alpha_r - \alpha_s\| \geq \delta > 0$, 我们不妨设当 $1 \leq s \leq R, s \neq r$ 时, 有 p 个 s 的值 s_1, \dots, s_p , 满足 $\alpha_r - 1/2 < \beta_{s_i} < \alpha_r$, 且

$$\alpha_r - 1/2 < \beta_{s_1} < \beta_{s_2} < \dots < \beta_{s_p} < \alpha_r,$$

并有 $q = R - 1 - p$ 个 s 的值 t_1, \dots, t_q 满足 $\alpha_r < \beta_{t_i} \leq \alpha_r + 1/2$, 且

$$\alpha_r < \beta_{t_1} < \beta_{t_2} < \dots < \beta_{t_q} \leq \alpha_r + 1/2.$$

则

$$\begin{aligned} \|\alpha_r - \alpha_{s_p}\| &= \|\alpha_r - \beta_{s_p}\| \geq \delta, \\ \|\alpha_r - \alpha_{s_{p-1}}\| &= \|\alpha_r - \beta_{s_{p-1}}\| = \alpha_r - \beta_{s_{p-1}} \\ &= (\alpha_r - \beta_{s_p}) + (\beta_{s_p} - \beta_{s_{p-1}}) \\ &= \|\alpha_r - \alpha_{s_p}\| + \|\alpha_{s_p} - \alpha_{s_{p-1}}\| \geq 2\delta, \\ &\dots \\ \|\alpha_r - \alpha_{s_1}\| &= \|\alpha_r - \beta_{s_1}\| = \alpha_r - \beta_{s_1} = (\alpha_r - \beta_{s_p}) \\ &\quad + (\beta_{s_p} - \beta_{s_{p-1}}) + \dots + (\beta_{s_2} - \beta_{s_1}) \\ &= \|\alpha_r - \alpha_{s_p}\| + \|\alpha_{s_p} - \alpha_{s_{p-1}}\| + \dots \\ &\quad + \|\alpha_{s_2} - \alpha_{s_1}\| \geq p\delta, \end{aligned}$$

并且类似地可得

$$\|\alpha_t - \alpha_{t_1}\| \geq \delta, \|\alpha_r - \alpha_{t_2}\| \geq 2\delta, \dots, \|\alpha_r - \alpha_{t_q}\| \geq q\delta.$$

于是, 当 r 固定时, 由(8)及(9)可得(不难看出, 若 $p = 0$ 或 $q = 0$, 则也成立)

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^R |B(\alpha_s - \alpha_r)| &\leq 2K + L + 2 \cdot \frac{1}{4L} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (n\delta)^{-2} \\ &= 2K + L + \frac{1}{2L} \delta^{-2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \right). \quad (10) \end{aligned}$$

因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \leq 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^2} = 1 + \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2} = 2,$$

所以

$$\begin{aligned} 2K + L + \frac{1}{2L} \cdot \delta^{-2} \cdot 2 &\leq 2K + \delta^{-1} + 1 + \delta^{-1} \\ &= 2K + 2\delta^{-1} + 1. \end{aligned} \quad (11)$$

由(7),(10)及(11),可得(i)。

(ii) 若 N 为偶数,令 $a_{M+N+1} = 0, K = N/2$, 以及

$$A_n = a_{n+M+K+1}, \quad -K \leq n \leq K,$$

则由

$$\begin{aligned} S(\alpha_r) &= \sum_{n=M+1}^{M+N+1} a_n e(n\alpha_r) = \sum_{n=-K}^K a_{n+M+K+1} e((n+M+K+1)\alpha_r) \\ &= \left(\sum_{n=-K}^K A_n e(n\alpha_r) \right) e((M+K+1)\alpha_r) \end{aligned}$$

及(i)即得(ii)。若 N 为奇数,令 $K = \frac{N-1}{2}$, 以及

$$A_n = a_{n+M+K+1}, \quad -K \leq n \leq K,$$

则由

$$\begin{aligned} S(\alpha_r) &= \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(n\alpha_r) = \sum_{n=-K}^K a_{n+M+K+1} e((n+M+K+1)\alpha_r) \\ &= \left(\sum_{n=-K}^K A_n e(n\alpha_r) \right) e((M+K+1)\alpha_r) \end{aligned}$$

及(i)即得(ii)。证毕。

作为定理 2.1.3 的(ii)的一个应用,我们有

定理 2.1.4 设 χ 为模 q 的原特征,并令

$$T(\chi) = \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n \chi(n),$$

此处 a_n 为任意复数。则对于 $Q \geq 3$, 有

$$\sum_{3 \leq q \leq Q} \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{\chi}^* |T(\chi)|^2 \leq (N + 2Q^2 + 1) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2,$$

其中 \sum_{χ}^* 表示求和通过模 q 的所有原特征 χ 。

证明:由定理 1.2.3 的(i) 及(ii) 可知,当 χ 为模 q 的原特征时,

$$\chi(n) = \frac{1}{\tau(\chi)} \sum_{1 \leq a \leq q} \bar{\chi}(a) e\left(\frac{na}{q}\right)$$

总成立,且其中 $|\tau(\chi)| = \sqrt{q}$ 。因此

$$T(\chi) = \frac{1}{\tau(\chi)} \sum_{1 \leq a \leq q} \bar{\chi}(a) \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e\left(\frac{na}{q}\right),$$

$$\sum_{\chi}^* |T(\chi)|^2 \leq \frac{1}{q} \sum_{\chi} \left| \sum_{1 \leq a \leq q} \bar{\chi}(a) \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e\left(\frac{na}{q}\right) \right|^2, \quad (12)$$

其中 \sum_{χ} 表示对模 q 所有特征求和。将(12)右边的平方展开,并应用定理 1.2.2 的(ii),可得

$$\begin{aligned} \sum_{\chi}^* |T(\chi)|^2 &\leq \frac{1}{q} \sum_{\chi} \sum_{1 \leq a_1, a_2 \leq q} \bar{\chi}(a_1) \chi(a_2) \cdot \\ &\quad \sum_{n_1=M+1}^{M+N} \sum_{n_2=M+1}^{M+N} a_{n_1} \overline{a_{n_2}} e\left(\frac{a_1 n_1 - a_2 n_2}{q}\right) \\ &= \frac{\varphi(q)}{q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e\left(\frac{na}{q}\right) \right|^2. \end{aligned}$$

所以,为证定理 2.1.4,我们只需证明

$$\begin{aligned} \lambda &= \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{a=1 \\ (a,q)=1}}^q \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e\left(\frac{na}{q}\right) \right|^2 \\ &\leq (N + 2Q^2 + 1) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2. \end{aligned} \quad (13)$$

为此,我们应用定理 2.1.3 的(ii)。令

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{a}{q} \mid 1 \leq a \leq q \leq Q, (a, q) = 1 \right\}$$

即 \mathcal{A} 为不超过 1、分子与分母互素、且分母不超过 Q 的正分数全体的集合。设 \mathcal{A} 中元素个数为 R , 并将 \mathcal{A} 中元素排序为 α_1, \dots ,

α_R 。则显然

$$\lambda = \sum_{r=1}^R \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(\alpha_r n) \right|^2.$$

当 $r \neq s$ 时, $\|\alpha_r - \alpha_s\| = |\alpha_r - \alpha_s|$ 或 $1 - |\alpha_r - \alpha_s|$ 。由于当 $a/q \in \mathcal{A}, a'/q' \in \mathcal{A}$ 且 $a/q \neq a'/q'$ 时,

$$\begin{aligned} \left| \frac{a}{q} - \frac{a'}{q'} \right| &= \frac{|a'q - aq'|}{qq'} \geq \frac{1}{qq'} \geq Q^{-2}, \\ 1 - \left| \frac{a}{q} - \frac{a'}{q'} \right| &= \frac{qq' - |a'q - aq'|}{qq'} \\ &\geq \frac{\min(aq', a'q)}{qq'} \geq \frac{1}{qq'} \geq Q^{-2}, \end{aligned}$$

所以当 $r \neq s$ 时, $\|\alpha_r - \alpha_s\| \geq Q^{-2}$ 。于是, 根据定理 2.1.3 的 (ii), 在其中选取 $\delta = Q^{-2}$, 可得估计

$$\sum_{r=1}^R \left| \sum_{n=M+1}^{M+N} a_n e(\alpha_r n) \right|^2 \leq (N + 2Q^2 + 1) \sum_{n=M+1}^{M+N} |a_n|^2,$$

即 (13) 成立。定理 2.1.4 证毕。

练 习

(I) 当 α 为实数, $J \geq 1$, J 不是整数时, 利用引理 2.1.2 证明

$$\begin{aligned} \sum_{|j| \leq J} (J - |j|) e(j\alpha) &= \\ &= \frac{(\sin(\pi[J]\alpha))^2(1 - \{J\}) + (\sin(\pi([J] + 1)\alpha))^2\{J\}}{(\sin(\pi\alpha))^2}, \end{aligned}$$

其中 $[J]$ 为不超过 J 的最大整数, $\{J\} = J - [J]$ 。在 α 为整数时, 这个等式右端应理解为将 α 换成 β 后, 令 $\beta \rightarrow \alpha$ 所得到的极限值

$$[J]^2(1 - \{J\}) + ([J] + 1)^2\{J\}.$$

(II) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} < \frac{7}{4}$, 并由此证明定理 2.1.3 的 (i) 及 (ii)

中 $2\delta^{-1}$ 这项可被改进为 $\sqrt{\frac{7}{2}}\delta^{-1}$ 。

§ 2.2 Mellin 变换及其应用

设 $f(x)$ 是定义在实直线 $R^1 = (-\infty, \infty)$ 上的实值函数, $f(x)$ 在 R^1 上绝对可积, 即 $f(x)$ 在包含于 R^1 的任何有限区间上绝对可积, 且

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A |f(x)| dx < +\infty.$$

这时, $f(x)$ 的 Fourier 变换 $\hat{f}(x)$ 定义为

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e(ux) du = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(u) e(ux) du \\ &= \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\int_{-A}^A f(u) \cos(2\pi ux) du + i \int_{-A}^A f(u) \sin(2\pi ux) du \right), \quad (1) \end{aligned}$$

其中 $x \in R^1$, $e(\xi) = \exp(2\pi i \xi)$ 。由于 $f(x)$ 在 R^1 上绝对可积, 容易知道(1)式中的极限必然存在, 但 $\hat{f}(x)$ 未必是实的。我们需要在一定的条件下, 能够从 \hat{f} 求出 f 。为此我们要证明下面的定理。

定理 2.2.1 (i) 我们有

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

这里积分的值理解为当两个极限

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{\sin x}{x} dx, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{\sin x}{x} dx$$

都存在时, 它们的和。

(ii) 若实函数 f 在 R^1 上处处连续, 且在点 x 处可导, 则对任意的 $a, a > 0$, 都有

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x+y) \frac{\sin(\lambda y)}{y} dy = \pi f(x),$$

这里展布于 $[-a, a]$ 上的积分理解为当两个极限

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{\epsilon}^a f(x+y) \frac{\sin(\lambda y)}{y} dy, \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{-a}^{-\epsilon} f(x+y) \frac{\sin(\lambda y)}{y} dy \quad (2)$$

都存在时, 它们的和(考虑到 $y=0$ 是被积函数的瑕点)。

(iii) 若 $f(x)$ 在 R^1 上绝对可积, 且 $f(x)$ 在 R^1 上处处可导(因而也处处连续), 则

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(u) e(-ux) du.$$

证明: (i) 任给正数 ϵ 及 $N, 0 < \epsilon < 1/2, N > 1$, 我们有

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^N \frac{\sin x}{x} dx &= \int_{\epsilon}^N \sin x \left(\int_0^{\infty} e^{-xy} dy \right) dx \\ &= \int_{\epsilon}^N \sin x \left(\int_0^A e^{-xy} dy + O\left(\frac{1}{x} e^{-Ax}\right) \right) dx \\ &= \int_0^A \left(\int_{\epsilon}^N (\sin x) e^{-xy} dx \right) dy + O\left(\frac{N}{\epsilon} e^{-\epsilon A}\right), \quad (3) \end{aligned}$$

其中 $A > 1$ 。通过求不定积分, 我们有

$$\int \sin x \cdot e^{-xy} dx = -\frac{e^{-xy}(\cos x + y \sin x)}{1+y^2} + C,$$

其中 C 为任意常数。所以

$$\begin{aligned} \int_{\epsilon}^N \sin x \cdot e^{-xy} dx &= \frac{e^{-\epsilon y}(\cos \epsilon + y \sin \epsilon)}{1+y^2} - \frac{e^{-Ny}(\cos N + y \sin N)}{1+y^2}, \\ \int_0^A \int_{\epsilon}^N \sin x \cdot e^{-xy} dx dy &= \int_0^A \frac{e^{-\epsilon y} \cos \epsilon}{1+y^2} dy + \int_0^A \frac{e^{-\epsilon y} \cdot y \sin \epsilon}{1+y^2} dy \\ &\quad - \int_0^A \frac{e^{-Ny} \cdot \cos N}{1+y^2} dy - \int_0^A \frac{e^{-Ny} \cdot y \sin N}{1+y^2} dy. \end{aligned} \quad (4)$$

由于 $e^{-\epsilon y} \leq (\epsilon y)^{-1}, e^{-Ny} \leq (Ny)^{-1}$, 不难验证(4)式右端的那些积分当 $A \rightarrow +\infty$ 时都存在。于是, 在(3)和(4)式中 $A \rightarrow +\infty$, 可得

$$\begin{aligned}
 \int_{\epsilon}^N \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-\epsilon y} \cos \epsilon}{1+y^2} dy + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\epsilon y} \cdot y \sin \epsilon}{1+y^2} dy \\
 &\quad - \int_0^{\infty} \frac{e^{-Ny} \cos N}{1+y^2} dy - \int_0^{\infty} \frac{e^{-Ny} y \cdot \sin N}{1+y^2} dy \\
 &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.
 \end{aligned} \quad (5)$$

由 $e^{-Ny} \leq (Ny)^{-1}$, 我们有

$$I_3, I_4 = O\left(\frac{1}{N} \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^2}\right) = O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (6)$$

由 $e^{\epsilon y} \geq 1 + \epsilon y \geq 2\sqrt{\epsilon y}$, $1+y^2 \geq 2y$, 可得

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^1 \frac{e^{-\epsilon y} \cdot y \sin \epsilon}{1+y^2} dy + \int_1^{\infty} \frac{e^{-\epsilon y} y \sin \epsilon}{1+y^2} dy \\
 &\leq \frac{1}{2} \sin \epsilon + \left(\int_1^{\infty} \frac{y^{\frac{1}{2}}}{1+y^2} dy\right) \frac{\sin \epsilon}{\sqrt{\epsilon}} = O\left(\frac{\sin \epsilon}{\sqrt{\epsilon}}\right).
 \end{aligned} \quad (7)$$

令 $\delta = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$, 则

$$\begin{aligned}
 \left| \int_0^{\infty} \frac{e^{-\epsilon y} \cdot \cos \epsilon}{1+y^2} dy - \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} \right| &\leq \int_0^{\delta} \frac{|e^{-\epsilon y} \cos \epsilon - 1|}{1+y^2} dy \\
 &\quad + \int_{\delta}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy = J_1 + J_2.
 \end{aligned} \quad (8)$$

由于当 $0 \leq y \leq \delta$ 时, $e^{-\epsilon y} = 1 + O(\sqrt{\epsilon})$, 所以

$$\begin{aligned}
 e^{-\epsilon y} \cos \epsilon - 1 &= (1 + O(\sqrt{\epsilon})) \cos \epsilon - 1 \\
 &= -2\left(\sin \frac{\epsilon}{2}\right)^2 + O(\sqrt{\epsilon}) = O(\sqrt{\epsilon}),
 \end{aligned}$$

因此 $J_1 = O(\sqrt{\epsilon})$ 。又, 显然有 $J_2 = O(\delta^{-1}) = O(\sqrt{\epsilon})$ 。于是, 由 (5) ~ (8), 可知两个极限

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \int_{\epsilon}^1 \frac{\sin x}{x} dx, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{\sin x}{x} dx$$

都存在, 且它们的和为

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \arctan y \Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

(ii) 不等式 $|\sin z| \leq |z|$ 对任何实数 z 都成立。事实上, 当 $|z| \leq \frac{\pi}{2}$ 时它是熟知的, 而在 $|z| > \frac{\pi}{2} > 1$ 时, 它则是显然的。应用这个不等式, 容易由定义验证: 若 $F(u)$ 是任意的在区间 $[0, B]$ 上连续的函数, $u \in [0, B], \lambda > 0$, 则积分

$$\int_0^B F(u) \frac{\sin(\lambda u)}{u} du$$

存在。同样的结论对于区间 $[-B, 0]$ 也成立。特别地, 我们就知道 (2) 中的两个积分都是存在的。我们来证明

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^a f(x+y) \frac{\sin(\lambda y)}{y} dy = \frac{\pi}{2} f(x).$$

为此, 令

$$g(y) = \begin{cases} \frac{f(x+y) - f(y)}{y}, & \text{若 } y \neq 0, \\ f'(x), & \text{若 } y = 0. \end{cases}$$

由假设可知 $g(y)$ 为 R^1 上处处连续的函数。对于给定的 x , 设 $|f(x+y)|$ 作为 y 的函数在区间 $[0, a]$ 上的最大值为 M 。设 δ 是任一正数, $0 < \delta < a$, 则

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^a f(x+y) \frac{\sin(\lambda y)}{y} dy - \frac{\pi}{2} f(x) \right| \\ & \leq \left| \int_{\delta}^a (f(x+y) - f(x)) \frac{\sin(\lambda y)}{y} dy \right| \\ & + \left| f(x) \left(\frac{\pi}{2} - \int_{\delta}^a \frac{\sin(\lambda y)}{y} dy \right) \right| + \left| \int_0^{\delta} f(x+y) \frac{\sin(\lambda y)}{y} dy \right| \\ & \leq \left| \int_{\delta}^a g(y) \sin(\lambda y) dy \right| + \left| M \left(\frac{\pi}{2} - \int_{\lambda\delta}^{\lambda a} \frac{\sin y}{y} dy \right) \right| + M\lambda\delta. \end{aligned}$$

令 $\delta \rightarrow 0$, 得

$$\left| \int_0^a f(x+y) \frac{\sin(\lambda y)}{y} dy - \frac{\pi}{2} f(x) \right|$$

$$\leq \left| \int_0^a g(y) \sin(\lambda y) dy \right| + M \left| \frac{\pi}{2} - \int_0^{\lambda a} \frac{\sin y}{y} dy \right|.$$

再令 $\lambda \rightarrow +\infty$, 则由引理 1.3.2 和 (i) 可得

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_0^a f(x+y) \frac{\sin(\lambda y)}{y} dy = \frac{\pi}{2} f(x).$$

类似地, 可证

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-a}^0 f(x+y) \frac{\sin(\lambda y)}{y} dy = \frac{\pi}{2} f(x).$$

所以 (ii) 成立。

(iii) 在定理的条件下, 应用不等式 $|\sin z| \leq |z|$ (z 为实的), 容易验证 \hat{f} 在 R^1 上一致连续 (因而连续)。由定义, 这里要证明

$$f(x) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(u) e(-ux) du$$

对任何实数 $x \in R^1$ 成立。任取 $\varepsilon > 0$, 由于 $f(x)$ 在 R^1 上绝对可积, 我们可选取正数 $a = a(\varepsilon)$, 使得

$$\frac{1}{\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} |f(z)| dz < \frac{\varepsilon}{6}.$$

由 (ii),

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a f(x+y) \frac{\sin(2\pi\lambda y)}{y} dy = \pi f(x),$$

因此存在充分大正数 $\lambda_0 = \lambda_0(\varepsilon)$, 使得当 $\lambda > \lambda_0$ 时, 成立着

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a f(x+y) \frac{\sin(2\pi\lambda y)}{y} dy - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

当 $\lambda > \lambda_0$ 时, 又可选取 $M = M(x, \lambda, \varepsilon) > 0$, 使得

$$\lambda \left(\int_{M+x}^{\infty} |f(z)| dz + \int_{-\infty}^{-M+x} |f(z)| dz \right) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

对于任意实数 u , 我们有

$$\hat{f}(u) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(y) e(yu) dy = \int_{-M+x}^{M+x} f(y) e(yu) dy + \Delta,$$

其中

$$\begin{aligned}\Delta &= \Delta(M, x, u) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\int_{M+x}^A f(y) e(yu) dy \right. \\ &\quad \left. + \int_{-A}^{-M+x} f(y) e(yu) dy \right), \\ |\Delta| &\leq \int_{M+x}^{\infty} |f(z)| dz + \int_{-\infty}^{-M+x} |f(z)| dz < \frac{\varepsilon}{6\lambda}.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}& \left| \int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(u) e(-ux) du - f(x) \right| \\ &= \left| \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\int_{-M+x}^{M+x} f(y) e(yu) dy + \Delta \right) e(-ux) du - f(x) \right| \\ &\leq \left| \int_{-M+x}^{M+x} f(y) \left(\int_{-\lambda}^{\lambda} e(u(y-x)) du \right) dy - f(x) \right| + \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

由于当 $y \neq x$ 时,

$$\int_{-\lambda}^{\lambda} e((y-x)u) du = \frac{\sin(2\pi(y-x)\lambda)}{\pi(y-x)},$$

而若将 $y = x$ 看作 $y \rightarrow x$ 的极限情形, 则这个等式仍成立, 且等号两边的值为 2λ 。因此

$$\begin{aligned}& \left| \int_{-\lambda}^{\lambda} \hat{f}(u) e(-ux) du - f(x) \right| \\ &\leq \left| \int_{-M+x}^{M+x} f(y) \frac{\sin(2\pi\lambda(y-x))}{\pi(y-x)} dy - f(x) \right| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \left| \int_{-M}^M f(x+y) \frac{\sin(2\pi\lambda y)}{\pi y} dy - f(x) \right| + \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \left| \int_{-a}^a f(x+y) \frac{\sin(2\pi\lambda y)}{\pi y} dy - f(x) \right| + \\ &\quad + \left| \int_a^M f(x+y) \frac{\sin(2\pi\lambda y)}{\pi y} dy \right| \\ &\quad + \left| \int_{-M}^{-a} f(x+y) \frac{\sin(2\pi\lambda y)}{\pi y} dy \right| + \frac{\varepsilon}{3}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{2\epsilon}{3} + \frac{2}{\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} |f(\gamma)| d\gamma < \epsilon.$$

由于 ϵ 是任取的正数, 这就证明了 (iii)。证毕。

设 $g(\lambda)$ 是当 $\lambda > 0$ 时有定义的实函数, 使得当 $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$ 时, $\lambda^{s-1}g(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 的任何有限区间上绝对可积, 且积分

$$\int_0^1 \lambda^{s-1} g(\lambda) d\lambda, \quad \int_1^{\infty} \lambda^{s-1} g(\lambda) d\lambda \quad (9)$$

都绝对收敛, 即

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta}^1 \lambda^{\sigma-1} |g(\lambda)| d\lambda < +\infty, \quad \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \lambda^{\sigma-1} |g(\lambda)| d\lambda < +\infty, \quad (10)$$

其中 $\lambda^{s-1} = \exp((s-1)\log \lambda)$, 对数值取主分支。积分

$$G(s) = \int_0^{\infty} \lambda^{s-1} g(\lambda) d\lambda$$

定义为 (9) 中两个积分之和, 即

$$G(s) = \int_0^1 \lambda^{s-1} g(\lambda) d\lambda + \int_1^{\infty} \lambda^{s-1} g(\lambda) d\lambda.$$

由 (10) 式可知, $G(s)$ 的值当 $\operatorname{Re} s = \sigma > 0$ 时是确定的。我们称 $G(s)$ 为 $g(\lambda)$ 的 Mellin 变换。设 $s = \sigma + it$, $\sigma > 0$, t 为实数。我们有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \lambda^{s-1} g(\lambda) d\lambda &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta}^1 \lambda^{s-1} g(\lambda) d\lambda \\ &= 2\pi \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta_1}^0 e^{2\pi u(\sigma+it)} g(e^{2\pi u}) du \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^0 e^{(\sigma+it)2\pi u} g(e^{2\pi u}) du, \end{aligned}$$

其中当 $\delta \leq \lambda \leq 1$ 时, 我们作了变量替换 $\lambda = e^{2\pi u}$, $\delta_1 \leq u \leq 0$,

$\delta_1 = \frac{\log \delta}{2\pi}$ 。类似地, 可得

$$\int_1^{\infty} \lambda^{s-1} g(\lambda) d\lambda = 2\pi \int_0^{\infty} e^{(\sigma+it)2\pi u} g(e^{2\pi u}) du.$$

因此

$$G(\sigma + it) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} H(u) e(tu) du, \quad (11)$$

其中 $H(u) = e^{2\pi\sigma u} g(e^{2\pi u})$ 。由(10), 容易通过变量替换证明 $H(u)$ 在 $R^1 = (-\infty, \infty)$ 上绝对可积。若进一步假设函数 $g(\lambda)$ 在 $(0, +\infty)$ 上处处可导, 则可知函数 $H(u)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上处处可导。因此, 当我们把正实数 σ 看作固定, 而把 $G(\sigma + it)$ 看作 t 的函数时, 由(11) 可知

$$G(\sigma + it) = 2\pi \hat{H}(t)。$$

于是, 由定理 2.2.1 的(iii) 可得

$$H(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{H}(\gamma) e(-\gamma u) d\gamma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma + i\gamma) e(-\gamma u) d\gamma,$$

即

$$\begin{aligned} e^{2\pi\sigma u} g(e^{2\pi u}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\sigma + i\gamma) e(-\gamma u) d\gamma \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{-T}^T G(\sigma + i\gamma) e(-\gamma u) d\gamma. \end{aligned}$$

因此, 作变量替换 $e^{2\pi u} = v$, 我们得

$$\begin{aligned} g(v) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} G(\omega) v^{-\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{\sigma - iT}^{\sigma + iT} G(\omega) v^{-\omega} d\omega, \quad (12) \end{aligned}$$

其中 $\int_{\sigma - iT}^{\sigma + iT}$ 表示沿复 ω 平面上从点 $\sigma - iT$ 至点 $\sigma + iT$ 的连线所作的积分。特别地, 当 $g(\lambda) = e^{-\lambda}$, $\text{Res} = \sigma > 0$ 时, 由 § 1.1 我们知道 $G(s) = \Gamma(s)$, 因此, 由(12) 可得

$$e^{-v} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow +\infty} \int_{\sigma - iT}^{\sigma + iT} \Gamma(\omega) v^{-\omega} d\omega, \quad v > 0, \sigma > 0. \quad (13)$$

我们将应用(13) 证明下面一个定理。

定理 2.2.2 设 $z > 3$, (ξ_d) 是一组实数, $\xi_1 = 1, |\xi_d| \leq$

$|\mu(d)|$, 且当 $d > z$ 时, $\xi_d = 0$ 。设 q 为一固定正整数, $q = 1$ 或 $q \geq 3$, 函数 $\chi(n)$ 或者当 $q = 1, n \geq 1$ 时恒等于 1, 或者当 $q \geq 3$ 时为模 q 的一个原特征。 r 为一个正整数, $|\mu(r)| = 1, f(n)$ 为一个积性函数, $|f(n)| \leq n, f_r(n) = f((r, n))$ 。 $1/2 \leq \operatorname{Re} \rho = \sigma < 1$, ρ 为 $L(s, \chi)$ 的一个非平凡零点 (当 $q = 1$ 时, $L(s, \chi) = \zeta(s)$)。设 x 为一个正实数, $x \geq z, y = x(\log x)^2$ 。令

$$E_0 = \begin{cases} 1, & \text{若 } q = 1, \chi(n) \equiv 1 (n \geq 1), \\ 0, & \text{若 } q \geq 3, \chi(n) \text{ 为模 } q \text{ 的原特征,} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M((\xi_d), \chi, f, r, \rho, \omega) &= \sum_{d \leq z} \xi_d \chi(d) f_r(d) d^{-\rho-\omega} \\ &\cdot \prod_{p \mid \frac{r}{(r, q)}} (1 + \chi(p) p^{-\rho-\omega} (f(p) - 1)), \end{aligned}$$

则有

$$\begin{aligned} &e^{-1/x} + \sum_{2 \leq n \leq y} a(n) \chi(n) f_r(n) n^{-\rho} e^{-n/x} \\ &= E_0 \Gamma(1 - \rho) x^{1-\rho} \frac{\varphi(q)}{q} M((\xi_d), \chi, f, r, \rho, 1 - \rho) + \\ &+ O(rx^{1/2-\sigma} z^{1/2} q^{1/4} \log(2q)), \end{aligned}$$

其中 $a(n) = \sum_{d \mid n} \xi_d$ 。

证明: 设 $K > 1$ 。在 (13) 中令 $\sigma = 2, v = n/x, n$ 为任意正整数, 则有

$$\begin{aligned} e^{-n/x} &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\int_{2-i(K+T)}^{2+i(K+T)} \Gamma(\omega) \left(\frac{x}{n} \right)^\omega d\omega \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-iK}^{2+iK} \Gamma(\omega) \left(\frac{x}{n} \right)^\omega d\omega \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow +\infty} \left(\int_{2+iK}^{2+i(K+T)} \Gamma(\omega) \left(\frac{x}{n} \right)^\omega d\omega \right. \\ &\left. + \int_{2-i(K+T)}^{2-iK} \Gamma(\omega) \left(\frac{x}{n} \right)^\omega d\omega \right). \end{aligned} \quad (14)$$

由定理 1.1.5 的(iv) 可知, 当 $\operatorname{Re} \omega = 2, \operatorname{Im} \omega = t, |t| \geq 1$ 时,

$$\Gamma(\omega) = O(|t|^{3/2} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}) = O(e^{-\frac{\pi}{3}|t|}). \quad (15)$$

因此, 根据(14) 我们得

$$e^{-n/x} = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-iK}^{2+iK} \Gamma(\omega) \left(\frac{x}{n}\right)^\omega d\omega + O\left(\left(\frac{x}{n}\right)^2 e^{-\frac{\pi}{3}K}\right).$$

设 N 为正整数, ρ 为 $L(s, \chi)$ 的一个非平凡零点, 且 $5/6 \leq \operatorname{Re} \rho = \sigma < 1$, 则有

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N a(n) \chi(n) f_r(n) n^{-\rho} e^{-n/x} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-iK}^{2+iK} \Gamma(\omega) x^\omega \left(\sum_{n=1}^N a(n) \chi(n) f_r(n) n^{-\rho-\omega} \right) d\omega \\ &+ O\left(x^2 e^{-\frac{\pi}{3}K} \sum_{n=1}^K |a(n) f_r(n)| n^{-2}\right). \end{aligned} \quad (16)$$

因为

$$a(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d \leq z}} \xi_d, \quad |\xi_d| \leq |\mu(d)| \leq 1, \quad |f_r(n)| \leq (r, n) \leq r,$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a(n) \chi(n) f_r(n) n^{-\rho-\omega} &= \sum_{d \leq z} \xi_d \left(\sum_{\substack{n=1 \\ d|n}}^N \chi(n) f_r(n) n^{-\rho-\omega} \right) \\ &= \sum_{d \leq z} \xi_d \left(\sum_{\substack{n=1 \\ d|n}}^{\infty} \chi(n) f_r(n) n^{-\rho-\omega} + O\left(\sum_{n>N} r n^{-2}\right) \right) \\ &= \sum_{d \leq z} \xi_d \chi(d) d^{-\rho-\omega} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \chi(m) f_r(md) m^{-\rho-\omega} \right) \\ &+ O(rzN^{-1}). \end{aligned} \quad (17)$$

我们有

$$(r, md) = (r, d) \left(\frac{r}{(r, d)}, m \frac{d}{(r, d)} \right) = (r, d) \left(\frac{r}{(r, d)}, m \right).$$

由于 $\mu(r) \neq 0$, 所以 (r, d) 与 $\left(\frac{r}{(r, d)}, m\right)$ 互素. 因为 $f(n)$ 是积性

函数,我们有

$$f_r(md) = f((r, md)) = f(r, d)f\left(\frac{r}{(r, d)}, m\right).$$

容易验证: $f\left(\frac{r}{(r, d)}, m\right)$ 为 m 的积性函数。若令 $k = \frac{r}{(r, d)}$, 则有

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \chi(m) f_r(md) m^{-\rho-\omega} &= f(r, d) \left(\sum_{m=1}^{\infty} \chi(m) f(m, k) m^{-\rho-\omega} \right) \\ &= f(r, d) \prod_{p \mid k} \left(1 + f(p) \left(\sum_{l=1}^{\infty} \chi(p^l) p^{-l(\rho+\omega)} \right) \right) \times \\ &\quad \prod_{p \nmid k} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \chi(p^l) p^{-l(\rho+\omega)} \right) = \\ &\quad f_r(d) \prod_{p \mid k} \left(1 + f(p) \cdot \frac{\chi(p) p^{-\rho-\omega}}{1 - \chi(p) p^{-\rho-\omega}} \right) \times \\ &\quad \prod_{p \nmid k} \left(\frac{1}{1 - \chi(p) p^{-\rho-\omega}} \right) \\ &= f_r(d) L(\rho + \omega, \chi) \prod_{p \mid k} (1 + \chi(p) p^{-\rho-\omega} (f(p) - 1)). \quad (18) \end{aligned}$$

由(17)及(18)可得

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^N a(n) \chi(n) f_r(n) n^{-\rho-\omega} \\ &= L(\rho + \omega, \chi) M((\xi_d), \chi, f, r, \rho, \omega) + O(rzN^{-1}), \quad (19) \end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned} M((\xi_d), \chi, f, r, \rho, \omega) &= \sum_{d \leq z} \xi_d \chi(d) f_r(d) d^{-\rho-\omega} \\ &\quad \cdot \prod_{p \mid \frac{r}{(r, d)}} (1 + \chi(p) p^{-\rho-\omega} (f(p) - 1)). \end{aligned}$$

由(16)及(19), 应用 $|a(n)| \leq z$ 及 $|f_r(n)| \leq r$ 估计(16)中的 O 项, 并应用由(15)得到的估计

$$\int_{2-iK}^{2+iK} |\Gamma(\omega)| d\omega = O\left(\int_{-1}^1 |\Gamma(2+it)| dt\right)$$

$$+ \int_{1 \leq |t| \leq K} |\Gamma(2+it)| dt = O(1),$$

可得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N a(n) \chi(n) f_r(n) n^{-\rho} e^{-n/x} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{2-iK}^{2+iK} \Gamma(\omega) x^\omega L(\rho+\omega, \chi) M((\xi_d), \chi, f, r, \rho, \omega) d\omega \\ & \quad + O(x^2 r z e^{-\frac{\pi}{3}K}) + O(x^2 r z N^{-1}). \end{aligned} \quad (20)$$

在(20)中,先令 $N \rightarrow \infty$,再令 $K \rightarrow \infty$,可得

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \chi(n) f_r(n) n^{-\rho} e^{-n/x} = \\ & \lim_{K \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{2-iK}^{2+iK} \Gamma(\omega) L(\rho+\omega, \chi) x^\omega M((\xi_d), \chi, f, r, \rho, \omega) d\omega \right). \end{aligned} \quad (21)$$

用 Δ 表示复 ω 平面上以 $\frac{1}{2} - \sigma - iK, 2 - iK, 2 + iK$ 和 $\frac{1}{2} - \sigma + iK$ 为顶点的矩形,并令

$$F(\omega) = \Gamma(\omega) L(\rho+\omega, \chi) x^\omega M((\xi_d), \chi, f, r, \rho, \omega).$$

在 Δ 内部, $F(\omega)$ 的极点为 $\Gamma(\omega)$ 的 1 阶极点 $\omega = 0$ (见定理 1.1.5 的(ii)), 以及当 $q = 1, \chi(n) \equiv 1 (n \geq 1)$ 时, $L(\rho+\omega, \chi) = \zeta(\rho+\omega)$ 的 1 阶极点 $\omega = 1 - \rho \neq 0$ 。由残数定理我们有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{2-iK}^{2+iK} F(\omega) d\omega = L(\rho, \chi) M((\xi_d), \chi, f, r, \rho, 0) \\ & + E_0 \Gamma(1-\rho) x^{1-\rho} \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) M((\xi_d), \chi, f, r, \rho, 1-\rho) \\ & + \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{2-iK}^{\frac{1}{2}-\sigma-iK} F(\omega) d\omega + \int_{\frac{1}{2}-\sigma-iK}^{\frac{1}{2}-\sigma+iK} F(\omega) d\omega \right. \\ & \quad \left. + \int_{\frac{1}{2}-\sigma+iK}^{2+iK} F(\omega) d\omega \right). \end{aligned} \quad (22)$$

当 $|\operatorname{Im} \omega| = K > 1$, $\frac{1}{2} - \sigma \leq \operatorname{Re} \omega \leq 2$ 时, 与 (15) 类似地, 应用定理 1.1.5 的 (iv) 可知

$$\Gamma(\omega) = O(e^{-\frac{\pi}{3}K}).$$

由于 $\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}(\rho + \omega) \leq 2 + \sigma \leq 3$, 由定理 1.3.6 的 (i) 与 (ii) 可得

$$L(\rho + \omega, \chi) = O((qK)^{1/4} \log(qK)).$$

并且, 在 $\operatorname{Re}(\rho + \omega) \geq \frac{1}{2}$ 时, 由 $\mu(r) \neq 0$ 可得

$$\begin{aligned} |M((\xi_d), \chi, f, r, \rho, \omega)| &\leq \sum_{d \leq z} |f_r(d)| d^{-1/2} \prod_{p \mid \frac{r}{(r,d)}} (1 + p^{-1/2}(1+p)) \\ &\leq \sum_{d \leq z} |f_r(d)| d^{-1/2} \prod_{p \mid \frac{r}{(r,d)}} (1 + 2p^{1/2}) \\ &\ll \sum_{d \leq z} (r, d) d^{-1/2} \prod_{p \mid \frac{r}{(r,d)}} p \\ &= \sum_{d \leq z} r d^{-1/2} \ll r z^{1/2}. \end{aligned} \quad (23)$$

所以, 当 $|\operatorname{Im} \omega| = K$, $\frac{1}{2} - \sigma \leq \operatorname{Re} \omega \leq 2$ 时,

$$F(\omega) = O(x^2 e^{-\frac{\pi}{3}K} (qzK)^{1/2} \log(qK)).$$

由此可知

$$\lim_{K \rightarrow +\infty} \left(\int_{\frac{1}{2}-\sigma+iK}^{2-iK} F(\omega) d\omega + \int_{\frac{1}{2}-\sigma+iK}^{2+iK} F(\omega) d\omega \right) = 0. \quad (24)$$

当 $|t| \leq 1$ 时, 由于 $\frac{5}{6} \leq \operatorname{Re} \rho = \sigma \leq 1$, 所以 $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} - \sigma \leq -\frac{1}{3}$, 因此由定理 1.1.5 的 (i) 及 (ii) 可得

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - \sigma + it\right) = O\left(|\Gamma\left(\frac{3}{2} - \sigma + it\right)|\right)$$

$$= O\left(\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\right) = O(1), \quad (25)$$

而当 $|t| > 1$ 时, 则由定理 1.1.5 的(iv) 可知

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - \sigma + it\right) = O(|t|^{-\sigma} e^{-\frac{\pi}{2}|t|}). \quad (26)$$

由定理 1.3.6 的(i) 及(ii) 可得

$$L\left(\frac{1}{2} + it, \chi\right) = O((q(|t| + 2))^{1/4} \log(q(|t| + 2))). \quad (27)$$

由(23), (25) ~ (27), 我们有

$$F\left(\frac{1}{2} - \sigma + it\right) = \begin{cases} O(x^{1/2-\sigma} r z^{1/2} q^{1/4} \log(2q)), & \text{若 } |t| \leq 1, \\ O(x^{1/2-\sigma} r z^{1/2} e^{-\frac{\pi}{2}|t|} q^{1/4} \log q), & \text{若 } 1 < |t| \leq K. \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}-\sigma-iK}^{\frac{1}{2}-\sigma+iK} F(\omega) d\omega &= i \int_{-1}^1 F\left(\frac{1}{2} - \sigma + it\right) dt \\ &+ i \int_1^K F\left(\frac{1}{2} - \sigma + it\right) dt + i \int_{-K}^{-1} F\left(\frac{1}{2} - \sigma + it\right) dt \\ &= O(x^{1/2-\sigma} r z^{1/2} q^{1/4} \log(2q)). \end{aligned} \quad (28)$$

由(21), (22), (24) 及(28), 注意到 $L(\rho, \chi) = 0$, 我们得

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{\infty} a(n) \chi(n) f_r(n) n^{-\rho} e^{-n/x} \\ &= E_0 \Gamma(1-\rho) x^{1-\rho} \frac{\varphi(q)}{q} \cdot M((\xi_d), \chi, f, r, \rho, 1-\rho) \\ &\quad + O(x^{1/2-\sigma} r z^{1/2} q^{1/4} \log(2q)). \end{aligned}$$

由于 $a(1) = 1$, 以及

$$\begin{aligned} \sum_{n>y} |a(n) \chi(n) f_r(n) n^{-\rho} e^{-n/x}| &\leq \sum_{n>y} \tau(n) (r, n) n^{-5/6} e^{-n/x} \\ &\ll r \sum_{n>y} e^{-n/x} \\ &\ll r \left(e^{-(\log x)^2} + \sum_{n \geq [\gamma]+2} \int_{n-1}^n e^{-u/x} du \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\ll r \left(e^{-(\log x)^2} + \int_y^\infty e^{-u/x} du \right) \\ &= O(rxe^{-(\log x)^2}) = O(x^{-1}), \end{aligned}$$

可知定理 2.2.2 成立。证毕。

练 习

(I) 证明在定理 2.2.1 的(ii)中,若 f 处处连续,在点 x 处不可导,但(这里积分为瑕积分)

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_0^\delta \left| \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \right| dy &= 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0-} \int_\delta^0 \left| \frac{f(x+y) - f(x)}{y} \right| dy &= 0, \end{aligned}$$

则(ii)的结论仍成立。特别地,若 f 在点 x 处的左、右导数存在,则(ii)成立。考虑 $f(0) = 0, f(u) = u + 1 (u \neq 0)$ 的情况,说明 f 在点 x 处若不连续,则(ii)不成立。

(II) 若在(21)、(22)中,应用残数定理及 § 1.3 的练习(III),将积分由直线 $\operatorname{Re} \omega = 2$ 移至 $\operatorname{Re} \omega = -1/3 - \sigma$,并注意到 -1 为 $\Gamma(\omega)$ 的极点,证明定理 2.2.2 中的 O 项可换成

$$\begin{aligned} &O((q^{5/6} x^{-1/3-\sigma} (zr)^{4/3} \\ &+ (rz)^{2-\sigma} x^{-1} (q(|t|+2))^{3/2-\sigma} (\tau(r))^2 (\log 2qr)), \end{aligned}$$

这里 $\tau(r)$ 为除数函数。

§ 2.3 若干数论函数的求和

我们可在较一般的情况下,阐述如何用 § 1.6 中解析的方法研究求和

$$\sum_{n < x} a_n$$

的渐近公式或者估计, 这里 a_n 通常为实的积性函数, 而对于 x 则可先假设 $x = [x] + \frac{1}{2}$, $x \geq 3$ ($[x]$ 为不超过 x 的最大自然数)。我们的出发点是引理 1.6.2。设当 $a > 1$ 时 $\Delta(a) = 1$, 否则 $\Delta(a) = 0$ 。则由引理 1.6.2, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n < x} a_n &= \sum_{n=1}^N a_n \Delta\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n=1}^N a_n \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{1}{s} ds + O\left(\frac{\left(\frac{x}{n}\right)^b}{T \left|\log \frac{x}{n}\right|}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{x^s}{s} \left(\sum_{n=1}^N \frac{a_n}{n^s} \right) ds + O\left(\frac{x^b}{T} \sum_{n=1}^N \frac{|a_n|}{n^b \left|\log \frac{x}{n}\right|}\right), \end{aligned}$$

其中 $b > 0$, T 是适当选取的正数, $3 \leq T \leq x \log x$, N 是任意大于 x 的正整数, b 的选取使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^b} < +\infty.$$

因此, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n < x} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\left(\int_{-T}^T \frac{x^b dt}{b+|t|}\right) \left(\sum_{n > N} |a_n| n^{-b}\right)\right) \\ &\quad + O\left(\frac{x^b}{T} \sum_{n=1}^N \frac{|a_n|}{n^b \left|\log \frac{x}{n}\right|}\right), \end{aligned}$$

其中 $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ 被称为 a_n 的“生成函数”。在上式中令 $N \rightarrow \infty$ 就得到

$$\sum_{n < x} a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^b}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^b \left|\log \frac{x}{n}\right|}\right).$$

进一步, 若设当 $\frac{x}{2} \leq n \leq 2x$ 时 $a_n = O(f(x))$, 则由在推导 § 1.6

的(7) 时已证过的估计

$$\sum_{\frac{x}{2} \leq n \leq 2x} \left| \frac{1}{\log \frac{x}{n}} \right| \ll x \log x,$$

可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^b \left| \log \frac{x}{n} \right|} \ll \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^b} + f(x) x^{1-b} \log x.$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_{n < x} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{x^b}{T} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^b} \right)\right) \\ &\quad + O\left(\frac{f(x)x \log x}{T}\right). \end{aligned} \quad (1)$$

这个公式在有的书中被称为“Perron 公式”。在具体应用中,通过使用引理 1.3.1, $F(s)$ 常常可表示为含有 $\zeta(s)$ 或 $\zeta'(s)$ 等熟知函数的乘积,所以 $F(s)$ 可被解析开拓,成为 $\{s \mid \operatorname{Re} s > \sigma - \epsilon\}$ (σ 为某一指定实数,而 ϵ 为充分小正数) 中的亚纯函数。相应地,函数

$$G(s) = F(s) \frac{x^s}{s}$$

也可被适当地解析开拓。但要注意, $s = 0$ 或为 $G(s)$ 的极点,或为 $G(s)$ 的可去奇点。若 $\lim_{s \rightarrow 0} F(s) = 0$, 则 0 通常为 $G(s)$ 的可去奇点,否则为极点。于是,我们通常会应用残数定理。用 A 、 B 、 C 和 D 分别记复 s 平面上的点 $b + iT$ 、 $\sigma + iT$ 、 $\sigma - iT$ 与 $b - iT$ 。对于以 A 、 B 、 C 和 D 为顶点的矩形区域 Δ , 应用残数定理可得

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} G(s) ds = E + \frac{1}{2\pi i} (I_1 + I_2 + I_3), \quad (2)$$

其中 E 为解析开拓之后的 $G(s)$ 在 Δ 中的极点所对应的残数之和, I_1 、 I_2 和 I_3 分别为 $G(s)$ 沿直线段 \overline{DC} 、 \overline{CB} 和 \overline{BA} 的积分, 这里 \overline{DC} 表示由 D 至 C 的直线段, 以此类推 (解析开拓后的 $G(s)$ 仍记为“ $G(s)$ ”)。因此, 如果我们能将 $F(s)$ 解析开拓, 成为 $\{s \mid \operatorname{Re} s >$

$\sigma - \varepsilon$ 中的亚纯函数, 并知道 $F(s)$ 在区域 Δ 中的极点, 以及 $F(s)$ 在 $|\operatorname{Im}(s)| = T, \sigma \leq \operatorname{Re} s \leq b$ 和 $|\operatorname{Im} s| \leq T, \operatorname{Re} s = \sigma$ 时的估计, 就可以求得 $\sum_{n \leq x} a_n$ 的渐近公式或估阶。

在实际问题中, 我们常需要估计 $\left| \frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} \right|$ 及 $\left| \frac{1}{\zeta(z)} \right|$ 的上界。

引理 2.3.1 设 $T \geq 3, c = \frac{1}{3} c_{16}, c_{16}$ 为定理 1.5.8 中的常数, 则

(i) 当 $z = \beta + it, |t| \leq T, \beta \geq 1 - \frac{c}{\log(T+2)}, z \neq 1$ 时

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\frac{1}{z-1} + O((\log T)^2).$$

(ii) 当 $z = \beta + it, |t| \leq T_1 = \exp(\sqrt{\log T}), \beta \geq 1 - \frac{c}{\log(T+2)}, z \neq 1$ 时

$$\frac{1}{\zeta(z)} = O(\log T).$$

证明: (i) 由定理 1.5.8, 当 $z = \beta + it, |t| \leq T$, 且

$$1 - \beta \leq \frac{2c}{\log(T+2)}$$

时, $\zeta(z) \neq 0$ 。设

$$\sigma = 1 - \frac{c}{\log(T+2)}.$$

则当 $z = \beta + it, z \neq 1, \sigma \leq \beta \leq 1 + \frac{1}{\log x}$ 及 $|t| \leq T$ 时, 由定理 1.5.14 的 (v) 可得

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\frac{1}{z-1} + \sum_{|r_n - t| < 1} \frac{1}{z - \rho_n} + O(\log T),$$

其中求和通过 $\zeta(s)$ 所有满足 $|r_n - t| < 1$ 的非平凡零点 $\rho_n =$

$\beta_n + ir_n$ 。由于 $\beta \geq \sigma \geq \frac{c}{\log(T+2)} + \beta_n$, 我们有

$$\frac{1}{z - \rho_n} = O\left(\frac{1}{\beta - \beta_n}\right) = O(\log(T+2)).$$

又,由定理 1.5.14 的(i) 可得

$$\sum_{|r_n - t| < 1} 1 \leq 2 \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + (r_n - t)^2} \ll \log(|t| + 2) \leq \log(T+2). \quad (3)$$

所以

$$\frac{\zeta'(z)}{\zeta(z)} = -\frac{1}{z-1} + O((\log T)^2).$$

(ii) 分两种情况。

(a) $T_1 \geq |t| \geq 1$. 令

$$\sigma_0 = 1 - \frac{c}{\log(T+2)},$$

$$\sigma_1 = 1 + \frac{1}{\log(T+2)},$$

$$\sigma_2 = 1 - \frac{3c}{2\log(T+2)}.$$

由定理 1.5.8, 当 $|t| \leq T_1$ 且

$$\beta \geq 1 - \frac{2c}{\log(T_1+2)}$$

时, $\zeta(\beta + it) \neq 0$. 所以, 当 $1 \leq |t| \leq T_1$, t 固定, 且 $\sigma_2 \leq u \leq \sigma_1$

时, 作为 u 的函数 $\frac{\zeta'(u+it)}{\zeta(u+it)}$ 是连续的. 令

$$H(v) = \zeta(v+it)e^{-\delta(v)}, \quad \delta(v) = \int_{\sigma_1}^v \frac{\zeta'(u+it)}{\zeta(u+it)} du,$$

其中 $\sigma_2 \leq v \leq \sigma_1$, 积分是沿从 σ_1 至 v 的直线段取的. $\delta(v)$ 在 $[\sigma_2, \sigma_1]$ 上可导, 且

$$\delta'(v) = \frac{\zeta'(v+it)}{\zeta(v+it)}.$$

由此可知, 对于 $v \in [\sigma_2, \sigma_1]$,

$$H'(v) = \zeta'(v+it)e^{-\delta(v)} - \zeta(v+it)e^{-\delta(v)} \cdot \delta'(v) = 0.$$

因此, $H(v)$ 在 $v \in [\sigma_0, \sigma_1]$ 上为常数, 于是

$$\begin{aligned}\zeta(v+it)e^{-\delta(v)} &= \zeta(\sigma_1+it)e^{-\delta(\sigma_1)} = \zeta(\sigma_1+it), \\ \left| \frac{1}{\zeta(v+it)} \right| &= \left| \frac{1}{\zeta(\sigma_1+it)} \right| e^{-\operatorname{Re}(\delta(v))}.\end{aligned}\quad (4)$$

我们有

$$\left| \frac{1}{\zeta(\sigma_1+it)} \right| = \prod_p |1 - p^{-\sigma_1-it}| \leq \prod_p (1 + p^{-\sigma_1}) \leq \zeta(\sigma_1),$$

因此, 由定理 1.3.6 的(ii) 可知

$$\left| \frac{1}{\zeta(\sigma_1+it)} \right| = O(\log T). \quad (5)$$

当 $v \in [\sigma_0, \sigma_1]$ 时, 由定理 1.5.14 的(v) 可得

$$\begin{aligned}\delta(v) &= \int_{\sigma_1}^v \left(-\frac{1}{u+it-1} + \sum_{|t-r_n| < 1} \frac{1}{u+it-\rho_n} + O(\log(|t|+2)) \right) du \\ &= O\left(\frac{1}{\log T}\right) + O\left(\int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \left(\sum_{|t-r_n| < 1} \frac{1}{u-\beta_n} \right) du\right).\end{aligned}\quad (6)$$

由于

$$\begin{aligned}u - \beta_n &\geq \sigma_0 - \beta_n = 1 - \frac{c}{\log(T+2)} - \beta_n \\ &\geq \frac{2c}{\log(T_1+2)} - \frac{c}{\log(T+2)} \\ &\geq \frac{c}{\log(T_1+2)},\end{aligned}$$

并且可与(3) 式类似地得

$$\sum_{|r_n-t| < 1} 1 \ll \log(|t|+2) \ll \log(T_1+2),$$

所以由(6) 式可得

$$\delta(v) = O(1). \quad (7)$$

由(4)、(5) 及(7), 可得所需的估计。

(b) $|t| < 1$ 。由引理 1.5.9 可知, 当 $s = \sigma + ir$, $|r| \leq \sqrt{5}$ 时, $\zeta(s) \neq 0$ 。令

$$G(s) = \begin{cases} \frac{1}{\zeta(s)}, & \text{若 } s = \sigma + ir \neq 1, 0 \leq \sigma \leq 1, |r| \leq 2, \\ 0, & \text{若 } z = 1. \end{cases}$$

若 z_0 属于有界闭集 $D = \{s | s = \sigma + ir, 0 \leq \sigma \leq 1, |r| \leq 2\}$, 且 $z_0 \neq 1$, 则由于 $\zeta(s)$ 在 D 中连续且不为零, 容易知道 $G(s)$ 在 z_0 处连续. 若 $z_0 = 1$, 则由于(应用定理 1.3.5 的(ii))

$$\lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{\zeta(s)} = 0,$$

可知 $G(s)$ 在 0 处也连续. 于是, $G(s)$ 在有界闭集 D 上连续. 因此我们有

$$G(s) = O(1).$$

特别地, 由此可知 $\frac{1}{\zeta(z)} = O(1)$.

综合(a)、(b), 可知(ii) 成立. 引理 2.3.1 证毕.

用初等的方法和上述解析的方法, 我们可证明:

引理 2.3.2 设 $x \geq 1, x_1 = 3x, a = -1/3, r$ 为正整数,

$$\tau_a(r) = \prod_{p|r} (1 - p^a)^{-1},$$

δ 代表某个正的绝对常数(每次出现未必相同). 我们有

$$(i) \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, r) = 1}} \mu(n) n^{-1} \log n = -\frac{r}{\varphi(r)} + O((\tau_a(r))^2 e^{-\delta \sqrt{\log x_1}}),$$

其中 $\mu(n)$ 为 Möbius 函数, 即 $\mu(1) = 1$, 当 $n = p_1 \cdots p_l, p_1, \dots, p_l$ 为互不相同素数时 $\mu(n) = (-1)^l$, 否则 $\mu(n) = 0$.

(ii) 设 ε 为任意的正的常数, 则

$$\tau_a(r) \ll \tau(r) \ll r^\varepsilon,$$

其中 $\tau(r)$ 为通常的除数函数.

(iii) 设 $k \geq 1, k$ 为常数, 则

$$\sum_{n \leq x} (\tau_a(n))^k = \lambda x + O(x^{13/18 + \varepsilon}),$$

其中

$$\lambda = \prod_p (1 - p^{-1} + p^{-1}(1 - p^a)^k).$$

$$(iv) \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, r) = 1}} \mu(n) n^{-1} = O(\tau_a(r) e^{-\delta \sqrt{\log x_1}}).$$

$$(v) \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, r) = 1}} \frac{\mu(n)}{k(n)} \log n = -\zeta(2) \prod_{p|r} (1 + \frac{1}{p}) + O((\tau_a(r))^2 e^{-\delta \sqrt{\log x_1}}),$$

其中 $k(n) = n \prod_{p|n} (1 + \frac{1}{p})$ 。

$$(vi) \sum_{\substack{(n, r) = 1 \\ n \leq x}} \frac{\mu(n)}{k(n)} = O(\tau_a(r) e^{-\delta \sqrt{\log x_1}}),$$

这里 $k(n) = n \prod_{p|n} (1 + \frac{1}{p})$ 。

$$(vii) \sum_{n \leq x} \mu(n) = O(x e^{-\delta \sqrt{\log x_1}}).$$

$$(viii) \sum_{n \leq x} \frac{|\mu(n)|}{\varphi(n)} = \log x + \alpha + O(x^{-2/5+\epsilon}),$$

其中 ϵ 为任给充分小正数, 而

$$\alpha = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{1}{2} \log \pi + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\rho_n(1 - \rho_n)},$$

这里求和通过 $\zeta(s)$ 所有非平凡零点。

$$(ix) \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, r) = 1}} |\mu(n)| = \frac{x}{\zeta(2)} \prod_{p|r} (1 + \frac{1}{p})^{-1} \\ + O(x^{3/5} \tau_a(r) (\log x_1)^3).$$

(x) 设 $y = \max(y_1, y_2)$, $y_1 > 1, y_2 > 1, x \geq y$, 则

$$\sum_{\substack{y < n \leq x \\ (n, r) = 1}} |\mu(n)| \left(\log \frac{n}{y_1} \right) \left(\log \frac{n}{y_2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{\zeta(2)} \prod_{p|r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \left(\left(\log \frac{x}{y_1} - 1\right) \left(\log \frac{x}{y_2} - 1\right) + 1 \right) \\
&+ \frac{y}{\zeta(2)} \prod_{p|r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \left(\log \frac{y^2}{y_1 y_2} - 2 \right) \\
&+ O\left(x^{3/5} \tau_a(r) \log \frac{2x}{y_1} \log \frac{2x}{y_2} (\log x_1)^3\right).
\end{aligned}$$

$$(xi) \sum_{n \leq x} (\Lambda(n))^2 = x \log x - x + O(xe^{-\delta \sqrt{\log x_1}}).$$

$$(xii) \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \log x + \gamma + O\left(\frac{1}{x}\right),$$

其中 γ 为一个常数(通常称为 Euler 常数)。

(xiii) 设 r 及 s 为正数, $r \geq 1, s > 1$, 则

$$\sum_{n \leq x} n^{-1} (\tau_a(n))^r \left(\log \frac{2x}{n}\right)^{-s} \ll 1,$$

其中记号 \ll 所蕴含的常数与 r 及 s 有关。

(xiv) 设 $r \geq 1, s \geq 0$, 则

$$\sum_{n \leq x} (\tau_a(n))^r (\log 2n)^{-s} \ll x (\log x_1)^{-s}.$$

(xv) 设 $r \geq 1, 0 < \alpha \leq 1, s \geq 0$, 则

$$\sum_{n \leq x} n^{-\alpha} (\tau_a(n))^r \left(\log \frac{2x}{n}\right)^s \ll \begin{cases} x^{1-\alpha}, & \text{若 } 0 < \alpha < 1, \\ (\log x_1)^{s+1}, & \text{若 } \alpha = 1. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
(xvi) \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,r)=1}} \frac{|\mu(n)|}{n} &= \frac{1}{\zeta(2)} \prod_{p|r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \left(\log x + \prod_{p|r} \frac{\log p}{p+1} + c_1 \right) \\
&+ O(x^{-2/5} \tau_a(r) (\log x_1)^3),
\end{aligned}$$

其中

$$c_1 = -\frac{2\zeta'(2)}{\zeta(2)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma'\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} + \frac{1}{2} \log \pi + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\rho_n(1-\rho_n)} + A,$$

求和通过 $\zeta(s)$ 所有的非平凡零点, A 为推论 1.4.9 中的常数。

证明: 显然, 我们可设 $x \geq 3$, 因为否则所有结果都平凡地成立. 并且, 我们不妨假设 $x = [x] + \frac{1}{2}$, 因为否则我们将以 $[x] + \frac{1}{2}$ 代替 x 去研究每个求和, 而所带来的误差对所需得到的最后的余项来说总是允许的. 我们总采用本节开头的阐述中所用的一些记号.

(i) 当 $n \geq 1, (n, r) = 1$ 时, 令 $a_n = \mu(n)n^{-1} \log n$, 否则令 $a_n = 0$. 令

$$b = \frac{1}{\log x}, T = \exp(\sqrt{\log x}), f(x) = x^{-1} \log x.$$

则相应于(1), 当 $\text{Res} = b$ 时, 我们有(用到引理 1.3.1),

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{\substack{n=1 \\ (n,r)=1}}^{\infty} \frac{\mu(n) \log n}{n^{1+s}} = - \left(\sum_{\substack{n=1 \\ (n,r)=1}}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^{1+s}} \right)'_s \\ &= - \left(\prod_{p|r} \left(1 - \frac{1}{p^{1+s}} \right) \right)'_s \\ &= - \left(\frac{1}{\zeta(s+1)} \prod_{p|r} \left(1 - \frac{1}{p^{1+s}} \right)^{-1} \right)'_s \\ &= \frac{\zeta'(1+s)}{(\zeta(1+s))^2} \prod_{p|r} \left(1 - \frac{1}{p^{1+s}} \right)^{-1} \\ &\quad + \frac{1}{\zeta(1+s)} \left(\prod_{p|r} \left(1 - \frac{1}{p^{1+s}} \right)^{-1} \right) \left(\sum_{p|r} \frac{\log p}{p^{s+1} - 1} \right), \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O\left(\frac{1}{T} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^b} \right)\right) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{T} (\log x)^2\right). \quad (9) \end{aligned}$$

由引理 2.3.1 我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{n^b} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^{1+b}} = -\zeta'(1+b)$$

$$= -\frac{\zeta'(1+b)}{\zeta(1+b)} \cdot \zeta(1+b) = O((\log x)^2). \quad (10)$$

令 $\sigma = -\frac{c}{2\log(3x+2)}$, c 为引理 2.3.1 中的常数。由定理 1.3.5 的 (ii) 及定理 1.5.8 可知, 函数

$$G(s) = \frac{x^s}{s} F(s)$$

在以点 $A = b + iT$, $B = \sigma + iT$, $C = \sigma - iT$ 和 $D = b - iT$ 为顶点的矩形中的仅以 $s = 0$ 为 1 阶极点, 且相应的残数为

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} (s \cdot G(s)) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\frac{1}{s \cdot \zeta(1+s)} \cdot s \cdot \frac{\zeta'(1+s)}{\zeta(1+s)} \prod_{p|r} \left(1 - \frac{1}{p^{1+s}}\right)^{-1} \right. \\ &\quad \left. + s \cdot \frac{1}{s \cdot \zeta(1+s)} \left(\prod_{p|r} \left(1 - \frac{1}{p^{1+s}}\right)^{-1} \right) \left(\sum_{p|r} \frac{\log p}{p^{s+1} - 1} \right) \right] \\ &= - \prod_{p|r} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = - \frac{r}{\varphi(r)}. \end{aligned}$$

因此, 相应于 (2), 我们有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} G(s) ds = -\frac{r}{\varphi(r)} + \frac{1}{2\pi i} (I_1 + I_2 + I_3), \quad (11)$$

其中, I_1, I_2, I_3 分别为 $G(s)$ 沿着三条直线段 \overline{DC} , \overline{CB} 与 \overline{BA} 所作的积分。当

$$\sigma \leq \operatorname{Re} s = u \leq b, |\operatorname{Im} s| = T, \text{ 或 } \operatorname{Re} s = \sigma, |\operatorname{Im} s| \leq T,$$

且 x 充分大时, 由引理 2.3.1 以及

$$\begin{aligned} \left| \prod_{p|r} \left(1 - \frac{1}{p^{s+1}}\right)^{-1} \right| &\leq \prod_{p|r} \left(1 - \frac{1}{p^{1+\sigma}}\right)^{-1} \leq \tau_a(r), \\ \left| \prod_{p|r} \frac{\log p}{p^{s+1} - 1} \right| &\leq \sum_{p|r} \frac{\log p}{p^{\sigma+1} - 1} \ll \sum_{p|r} p^a \leq \tau_a(r), \end{aligned}$$

根据 (8) 可得

$$\begin{aligned} F(s) &= O((\log x)^2 \cdot \tau_a(r)) + O((\log x)^2 \cdot (\tau_a(r))^2) \\ &= O((\tau_a(r))^2 (\log x)^2) \end{aligned}$$

所以

$$I_1, I_3 = O\left((\tau_a(r))^2 (\log x)^2 \frac{b-\sigma}{T}\right) = O((\tau_a(r))^2 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\log(3x)}}),$$

$$\begin{aligned} I_2 &= O\left(\int_{-T}^T \frac{x^\sigma}{|t|+b} (\tau_a(r))^2 (\log x)^2 dt\right) \\ &= O((\tau_a(r))^2 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\log(3x)}}). \end{aligned}$$

因此,由(9)、(10)以及(11),可得(i)。

(ii) 分三个步骤。

(a) 由于当 $p > 7$ 时, $1 - p^a \geq \frac{1}{2}$, 所以

$$\tau_a(r) = \prod_{p|r} (1 - p^a)^{-1} \ll \prod_{p|r} 2 \ll \tau(r).$$

(b) 当 $x \geq 1$ 时, 令

$$f(x) = \frac{1}{x} \log(1+x), \quad g(x) = \frac{x}{1+x} - \log(1+x).$$

由于

$$g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} < 0,$$

所以 $g(x)$ 为单调下降的, $g(x) \leq g(1) = \frac{1}{2} - \log 2 < 0$ 。由于

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1+x} \cdot x - \log(1+x) \right) = \frac{1}{x^2} g(x) < 0,$$

所以 $f(x)$ 为单调下降的, $f(x) \leq f(1) = \log 2$ 。因此

$$(1+x)^{1/x} \leq 2, \text{ 若 } x \geq 1.$$

(c) 无妨设 $\varepsilon < \frac{1}{\log 2}$ 。设 r 的标准素因子分解式为 $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, 其中 $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, p_1, \dots, p_k 均为素数。则

$$\frac{\tau(r)}{r^\varepsilon} = \prod_{1 \leq i \leq k} \frac{1+x_i}{p_i^{\varepsilon x_i}} \leq \prod_{1 \leq i \leq k} * \frac{1+x_i}{p_i^{\varepsilon x_i}},$$

这里 $*$ 表示 $1+x_i \geq p_i^{\varepsilon x_i}$ 。但若 p_i 满足这个不等式, 则由(ii)可知

$$p_i \leq ((1+x_i)^{1/x_i})^{1/\varepsilon} \leq 2^{1/\varepsilon},$$

因此在乘积 $\prod_{1 \leq i \leq k}^*$ 中, 至多有 $\leq 2^{1/\varepsilon}$ 项。因此, 由于

$$p_i^{\varepsilon x_i} \geq 2^{\varepsilon x_i} = e^{\varepsilon x_i \log 2} \geq 1 + \varepsilon x_i \log 2 \geq (1+x_i)\varepsilon \log 2,$$

我们得

$$\frac{\tau(r)}{r^\varepsilon} \leq (\varepsilon \log 2)^{-\varepsilon_1}, \varepsilon_1 = 2^{1/\varepsilon}.$$

(ii) 证毕。

(iii) 令 $a_n = (\tau_a(n))^k$, $b = 1 + \frac{1}{\log x}$, $T = x^{1/3-\varepsilon^2}$, $f(x) = x^{\varepsilon^2}$, ε 为任一给定正数。当 $\operatorname{Re} s = b$ 时, 由于 $\tau_a(n)$ 为积性函数, 由 (ii) 及引理 1.3.1 可得

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tau_a(n))^k}{n^s} = \prod_p \left(1 + (1-p^a)^{-k} \left(\sum_{m=1}^{\infty} p^{-ms} \right) \right) \\ &= \prod_p \left(1 + (1-p^a)^{-k} p^{-s} (1-p^{-s})^{-1} \right) \\ &= \zeta(s) \prod_p \left(1 + p^{-s} (1-p^a)^{-k} - p^{-s} \right) \\ &= \zeta(s) K(s), \end{aligned}$$

这里 $K(s)$ 当 $\operatorname{Re} s > 1+a = \frac{2}{3}$ 时是绝对收敛的。因此, 应用 (ii), 相应于 (1) 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} F(s) \frac{x^s}{s} ds + O(x^{2/3+\varepsilon}) \\ &\quad + O\left(\frac{x}{T} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-b}\right). \end{aligned} \quad (12)$$

由定理 1.3.6 的 (ii), 我们看到

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-b} &= \sum_{n=1}^{\infty} (\tau_a(n))^k n^{-b} = \zeta(b) K(b) \ll \zeta(b) \\ &= O(\log x). \end{aligned} \quad (13)$$

令 $\sigma = \frac{2}{3} + \varepsilon^2$ 。函数 $G(s) = F(s) \frac{x^s}{s}$ 在以 $A = b + iT, B = \sigma + iT, C = \sigma - iT$ 和 $D = b - iT$ 为顶点的矩形区域中仅以 $s = 1$ 为极点, 残数为

$$\lim_{s \rightarrow 1} \left((s-1) \frac{x^s}{s} F(s) \right) = x \cdot K(1)。$$

因此, 与(2) 和(11) 类似地有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} G(s) ds = K(1)x + \frac{1}{2\pi i} (I_1 + I_2 + I_3), \quad (14)$$

其中 I_1, I_2 与 I_3 分别为 $G(s)$ 沿着直线段 $\overline{DC}, \overline{CB}$ 与 \overline{BA} 所做的积分。当 $s = \beta + it, 5/6 \leq \beta \leq 1, |t| = T$, 或 $\beta = 5/6, |t| \leq T$ 时, 由定理 1.3.6 的(ii) 可知

$$\zeta(s) = O(|t| + 2)^{\frac{1-\beta}{2}} \log(|t| + 2),$$

且当 $1 \leq \beta \leq b = 1 + \frac{1}{\log x}, |t| = T$ 时, $\zeta(s) = O(\log T)$ 。因此

$$I_1, I_3 = O\left(\frac{x}{T} \cdot T^{\frac{1-\sigma}{2}} \log T\right) = O(x^{13/18+\varepsilon}),$$

$$\begin{aligned} I_2 &= O\left(x^\sigma \int_{-T}^T (|t| + 2)^{-\frac{\sigma+1}{2}} (\log(|t| + 2)) dt\right) \\ &= O(x^\sigma T^{\frac{1-\sigma}{2}} \log x) = O(x^{13/18+\varepsilon}). \end{aligned}$$

由(12)、(13) 及(14) 可得(iii)。

(iv) 可由(j) 类似地证明。这里从略。

(v) 由(j)

$$(k(n))^{-1} = n^{-1} \prod_{p|n} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} = n^{-1} \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{k(d)},$$

应用(i) 及(iii) 我们得

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,r)=1}} \frac{\mu(n) \log n}{k(n)} = \sum_{\substack{n \leq x \\ (n,r)=1}} \frac{\mu(n)}{n} \left(\sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{k(d)} \right) \log n$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{d \leq x \\ (d, r) = 1}} \frac{|\mu(d)|}{dk(d)} \left(\sum_{\substack{m \leq x/d \\ (m, rd) = 1}} \frac{\mu(m)}{m} (\log(md)) \right) \\
&= \sum_{\substack{d \leq x \\ (d, r) = 1}} \frac{|\mu(d)|}{dk(d)} \left(\log d \cdot \sum_{\substack{m \leq x/d \\ (m, rd) = 1}} \frac{\mu(m)}{m} + \sum_{\substack{m \leq x/d \\ (m, rd) = 1}} \frac{\mu(m)}{m} \log m \right) \\
&= \sum_{\substack{d \leq x \\ (d, r) = 1}} \frac{|\mu(d)|}{d \cdot k(d)} \left(-\frac{rd}{\varphi(rd)} + O((\tau_a(rd))^2 \log(2d) e^{-\delta \sqrt{\log(3x/d)}}) \right) \\
&= -\frac{r}{\varphi(r)} \left(\sum_{\substack{d \leq x \\ (d, r) = 1}} \frac{|\mu(d)|}{k(d) \varphi(d)} \right) + \\
&+ O \left(\sum_{\substack{d \leq x \\ (d, r) = 1}} \frac{|\mu(d)|}{d \cdot k(d)} \log(2d) (\tau_a(d))^2 e^{-\delta \sqrt{\log(3x/d)}} \right) (\tau_a(r))^2.
\end{aligned} \tag{15}$$

因为

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{d \leq x \\ (d, r) = 1}} \frac{|\mu(d)|}{k(d) \varphi(d)} &= \sum_{\substack{d=1 \\ (d, r) = 1}}^{\infty} \frac{|\mu(d)|}{k(d) \varphi(d)} + O \left(\sum_{d > x} d^{-2} \right) \\
&= \prod_{p \nmid r} \left(1 + \frac{1}{p^2 - 1} \right) + O(x^{-1}) \\
&= \zeta(2) \prod_{p \mid r} \left(1 - \frac{1}{p^2} \right) + O(x^{-1}),
\end{aligned}$$

且通过将求和范围分成 $d \leq \sqrt{x}$ 与 $d > \sqrt{x}$, 可得(注意到(ii))

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{d \leq x \\ (d, r) = 1}} \frac{|\mu(d)|}{d \cdot k(d)} \log(2d) (\tau_a(d))^2 e^{-\delta \sqrt{\log(3x/d)}} \\
&= O \left(\left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{|\mu(d)|}{d \cdot k(d)} \log(2d) (\tau_a(d))^2 \right) e^{-\delta \sqrt{\log(3x^{1/2})}} \right) + \\
&+ O \left(x^{-1/4} \sum_{d=1}^{\infty} \frac{|\mu(d)|}{d^{1/2} k(d)} \log(2d) \cdot (\tau_a(d))^2 \right) \\
&= O(e^{-\delta \sqrt{\log(3x^{1/2})}}).
\end{aligned}$$

由(15)可知(v)得证。

(vi) 应用(iv), 可与(v)类似地证明。这里从略。

(vii) 可与(i)及(iv)类似地证明。这里从略。

(viii) 当 $\operatorname{Re} s > 0$ 时, 由引理 1.3.1 可得

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{\varphi(n)n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{1}{p^s(p-1)} \right) \\ &= \zeta(s+1) \prod_p \left(1 + \frac{p^s - 1}{p^{2s+1}(p-1)} \right) \\ &= \zeta(s+1)K(s), \end{aligned}$$

这里 $K(s)$ 当 $\operatorname{Re} s > -\frac{1}{2}$ 时是绝对收敛的, 且 $K(0) = 1$ 。设 $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ 。令

$$b = \frac{1}{\log x}, \sigma = -\frac{1}{2} + \varepsilon, f(x) = x^{-1+\varepsilon/2}, T = x^{-4\sigma/5}。$$

由(ii), 我们知道

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p} \right) \gg n \left(\prod_{p|n} 2 \right)^{-1} \gg n(\tau(n))^{-1} \gg n^{1-\varepsilon/2},$$

因此, 由(1)及(2)可得

$$\begin{aligned} \sum_{n < x} \frac{|\mu(n)|}{\varphi(n)} &= E + O(x^{-2/5+\varepsilon}) + O\left(\frac{1}{T}\zeta(1+b)K(b)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi i}(I_1 + I_2 + I_3), \end{aligned} \quad (16)$$

其中 E 为函数 $G(s) = \frac{x^s}{s}F(s)$ 在 $s = 0$ 处的残数, I_1, I_2 及 I_3 分别为 $G(s)$ 沿直线段 \overline{DC} , \overline{CB} 与 \overline{BA} 所作的积分, 点 A, B, C, D 由 σ, b 及 T 定义如前。 $s = 0$ 为 $G(s)$ 的 2 阶零点。由定理 1.3.5 的(ii)及推论 1.4.9, 可得

$$\begin{aligned} E &= \lim_{s \rightarrow 0} (s^2 G(s))'_s = \lim_{s \rightarrow 0} (sx^s \cdot \zeta(1+s)K(s))'_s \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[\left(\log x + \frac{1}{s} + \frac{\zeta'(1+s)}{\zeta(1+s)} + \frac{K'(s)}{K(s)} \right) sx^s \zeta(1+s)K(s) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\lim_{s \rightarrow 0} \left(\log x + \frac{1}{s} + \frac{\zeta'(1+s)}{\zeta(1+s)} + \frac{K'(s)}{K(s)} \right) \right) \left(\lim_{s \rightarrow 0} (x^s \zeta(1+s) K(s)) \right) \\
&= (\log x + \alpha) K(0) = \log x + \alpha; \quad (17)
\end{aligned}$$

其中 $\alpha = -\frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} + \frac{1}{2} \log \pi + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\rho_n(1-\rho_n)}$, 求和通过 $\zeta(s)$

所有非平凡零点。由定理 1.3.6 的(ii) 可得估计

$$\zeta(1+b)K(b) = O(\zeta(1+b)) = O(\log x), \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= O\left(\int_{-T}^T \frac{x^\sigma}{|t|+2} (|t|+2)^{-\sigma/2} \log(|t|+2) dt\right) \\
&= O(x^\sigma T^{-\sigma/2} \log T) = O(x^{-2/5+\epsilon}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2, I_3 &= O\left(\frac{1}{T} \left(\int_\sigma^0 x^u \cdot T^{-u/2} \log T du + \int_0^b x^u \log x du \right)\right) \\
&= O(T^{-1} \log T) = O(x^{-2/5+\epsilon}).
\end{aligned}$$

因此, 由(16) ~ (18) 可得所需结果。

(ix) 由于当 $\operatorname{Re} s > 1$ 时, 由引理 1.3.1 可得

$$F(s) = \sum_{\substack{n=1 \\ (n,r)=1}}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^s} = \prod_{p \nmid r} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} \prod_{p \mid r} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

令 c 为引理 2.3.1 中的常数,

$$b = 1 + \frac{1}{\log x}, T = x^{2/5}, \sigma = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{c}{(\log T)^3}, f(x) = 1,$$

则由(1), (2), 及 $\zeta(b) = O(\log x)$, 可得

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,r)=1}} |\mu(n)| = E + O\left(\frac{x \log x}{T}\right) + \frac{1}{2\pi i} (I_1 + I_2 + I_3), \quad (19)$$

其中 E 为函数 $G(s) = \frac{x^s}{s} F(s)$ 在 $s = 1$ 处的残数,

$$E = \lim_{s \rightarrow 1} \left((s-1) \frac{1}{s} x^s F(s) \right) = \frac{x}{\zeta(2)} \prod_{p \mid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}, \quad (20)$$

而 I_1, I_2 与 I_3 为 $G(s)$ 沿直线段 \overline{DC} , \overline{CB} 与 \overline{BA} 所取的积分, 点 A ,

B, C 与 D 由 σ, T 及 b 定义同前。设 x 大于一个绝对常数。由定理 1.3.6 的(ii) 及引理 2.3.1 的(ii) 可得

$$\begin{aligned} I_1 &= O\left(\int_{-T}^T x^\sigma \tau_a(r) (|t| + 2)^{-\frac{1+\sigma}{2}} \cdot (\log x)^3 dt\right) \\ &= O(x^{3/5} (\log x)^3 \tau_a(r)), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} I_2, I_3 &= O\left(\frac{(\log x)^3}{T} \tau_a(r) \left(\int_1^b x du + \int_\sigma^1 x^u T^{\frac{1-u}{2}} du\right)\right) \\ &= O(x^{3/5} (\log x)^2 \tau_a(r)); \end{aligned} \quad (22)$$

其在用到: 当 $\text{Res} \geq \sigma$ 时, $\left| \prod_{p|r} \left(1 + \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \right| \leq \tau_a(r)$ 。由 (19) ~ (22), 可得 (ix)。

(x) 由引理 1.1.3 及 (ix) 得

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{y < n \leq x \\ (n,r)=1}} |\mu(n)| \log \frac{n}{y_1} \log \frac{n}{y_2} &= - \int_y^x \left(\sum_{\substack{y < n \leq u \\ (n,r)=1}} |\mu(n)| \right) \frac{1}{u} \log \left(\frac{u^2}{y_1 y_2} \right) du \\ &\quad + \left(\sum_{\substack{y < n \leq x \\ (n,r)=1}} |\mu(n)| \right) \frac{1}{x} \log \left(\frac{x^2}{y_1 y_2} \right) \\ &= - \int_y^x \left(\frac{xu}{\zeta(2)} \prod_{p|r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} + O(u^{3/5} \tau_a(r) (\log u)^3) \right) \frac{1}{u} \log \left(\frac{u^2}{y_1 y_2} \right) du \\ &\quad + \left(\frac{1}{\zeta(2)} \left(\prod_{p|r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \right) x + O(x^{3/5} \tau_a(r) (\log x)^3) \right) \frac{1}{x} \log \frac{x^2}{y_1 y_2} \\ &= - \frac{1}{\zeta(2)} \prod_{p|r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} (2x \log x - 2y \log y - 2x + 2y \\ &\quad - (\log(y_1 y_2))(x - y)) \\ &\quad + \frac{x}{\zeta(2)} \left(\prod_{p|r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \right) \cdot \log \frac{x}{y_1} \log \frac{x}{y_2} + \\ &\quad + O(x^{3/5} (\log x)^3 \log \left(\frac{x^2}{y_1 y_2} \right) \\ &\quad \cdot \tau_a(r)) + O(x^{3/5} (\log x)^3 \log \frac{x}{y_1} \log \frac{x}{y_2} \tau_a(r)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{x}{\zeta(2)} \left(\prod_{p \mid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \right) \left[\left(\log \frac{x}{y_1} - 1 \right) \left(\log \frac{x}{y_2} - 1 \right) + 1 \right] \\
&+ \frac{y}{\zeta(2)} \left(\prod_{p \mid r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} \right) \left(\log \frac{y^2}{y_1 y_2} - 2 \right) \\
&+ O \left(x^{3/5} (\log x)^3 \tau_a(r) \left(\log \frac{x^2}{y_1 y_2} + \log \frac{x}{y_1} \cdot \log \frac{x}{y_2} \right) \right).
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
\log \left(\frac{x^2}{y_1 y_2} \right) + \log \frac{x}{y_1} \cdot \log \frac{x}{y_2} &< \left(\log \frac{x}{y_1} + 1 \right) \left(\log \frac{x}{y_2} + 1 \right) \\
&\ll \log \frac{2x}{y_1} \cdot \log \frac{2x}{y_2},
\end{aligned}$$

(x) 得证。

(xi) 对任意实数 $u, u \geq 3$, 由定理 1.6.1 的(iii), 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{p \leq u} \log p &= \sum_{n \leq u} \Lambda(n) + O \left(\sum_{\substack{p^m \leq u \\ m \geq 2}} \log p \right) \\
&= u + O(u \exp(-\lambda_1 \sqrt{\log u})) + O \left(\sum_{p \leq u} \log p \sum_{\substack{m \leq \frac{\log u}{\log p}}} 1 \right) \\
&= u + O(u \exp(-\lambda_1 \sqrt{\log u})),
\end{aligned}$$

其中 $\lambda_1 > 0$, λ_1 为一个绝对常数。因此, 由引理 1.1.3 可得

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \Lambda^2(n) &= \sum_{p \leq x} (\log p)^2 + O \left(\sum_{p \leq x^{1/2}} (\log p)^2 \sum_{\substack{m \leq \frac{\log x}{\log p}}} 1 \right) \\
&= \sum_{3 < p \leq x} (\log p)^2 + O(x^{1/2} (\log x)^2) \\
&= - \int_3^x \left(\sum_{3 < p \leq u} \log p \right) \frac{1}{u} du + \left(\sum_{3 < p \leq x} \log p \right) \log x + \\
&\quad + O(x^{1/2} (\log x)^2) \\
&= x \log x - x + O(x e^{-\frac{1}{2}\lambda_1 \sqrt{\log x}});
\end{aligned}$$

其中已用到

$$\begin{aligned}\int_3^x e^{-\lambda_1 \sqrt{\log u}} du &= \int_3^{\sqrt{x}} + \int_{\sqrt{x}}^x = O(\sqrt{x}) + O(xe^{-\frac{1}{2}\lambda_1 \sqrt{\log x}}) \\ &= O(xe^{-\frac{1}{2}\lambda_1 \sqrt{\log x}}).\end{aligned}$$

(xii) 在推论 1.1.4 中取 $a = 1, b = x, f(n) = \frac{1}{n}$, 可得

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} &= 1 + \int_1^x \frac{1}{u} du - \int_1^x \psi(u) u^{-2} du - \frac{1}{2} - \psi(x) \frac{1}{x} \\ &= \log x + \frac{1}{2} - \int_1^\infty \psi(u) u^{-2} du + O\left(\frac{1}{x}\right),\end{aligned}$$

其中 $\psi(u) = u - [u] - \frac{1}{2}$. 令 $\gamma = \frac{1}{2} - \int_1^\infty \psi(u) u^{-2} du$, 则 (xii) 得证。

(xiii) 令 $I = \frac{\log x}{\log 2}, x_i = x \cdot 2^{-i}, 0 \leq i \leq I$, 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} n^{-1} (\tau_a(n))^r \left(\log \frac{2x}{n} \right)^{-s} &\leq \sum_{0 \leq i \leq I} \sum_{x_{i+1} \leq n \leq x_i} n^{-1} (\tau_a(n))^r \left(\log \frac{2x}{n} \right)^{-s} \\ &\ll x^{-1} \sum_{0 \leq i \leq I} 2^i (i+1)^{-s} \left(\sum_{x_{i+1} \leq n \leq x_i} (\tau_a(n))^r \right) \\ &\ll \sum_{0 \leq i \leq I} (i+1)^{-s} \ll 1;\end{aligned}$$

其中已用到 (iii)。

(xiv) 由 (iii), 我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x} (\tau_a(n))^r \cdot (\log 2n)^{-s} &= \sum_{n \leq \sqrt{x}} (\tau_a(n))^r (\log 2n)^{-s} \\ &\quad + \sum_{\sqrt{x} < n \leq x} (\tau_a(n))^r (\log 2n)^{-s} \\ &\ll \sum_{n \leq \sqrt{x}} (\tau_a(n))^r + (\log x)^{-s} \sum_{n \leq x} (\tau_a(n))^r \\ &\leq x (\log x)^{-s}.\end{aligned}$$

(xv) 令 $I = \frac{\log x}{\log 2}$. 由 (iii), 我们得

$$\sum_{n \leq x} n^{-\alpha} (\tau_a(n))^r \left(\log \frac{2x}{n} \right)^s \leq \sum_{0 \leq i \leq I} \sum_{x_{i+1} \leq n \leq x_i} n^{-\alpha} (\tau_a(n))^r \left(\log \frac{2x}{n} \right)^s$$

$$\begin{aligned} &\ll \sum_{0 \leq i \leq l} (i+1)^s (x \cdot 2^{-i})^{-\alpha} \cdot \sum_{x_{i+1} \leq n \leq x_i} (\tau_a(n))^r \\ &\ll \sum_{0 \leq i \leq l} (i+1)^s (x \cdot 2^{-i})^{1-\alpha}, \end{aligned}$$

其中 $x_i = x \cdot 2^{-i}$ 。当 $0 < \alpha < 1$ 时, 由于级数

$$\sum_{i \geq 0} (i+1)^s 2^{-i(1-\alpha)}$$

收敛, 可得所需估计。当 $\alpha = 1$ 时, 由于 $s \geq 0$, 所以

$$\sum_{1 \leq n \leq l+1} n^s \leq \sum_{1 \leq n \leq l+1} \int_n^{n+1} u^s du = \int_1^{l+2} u^s du \leq \frac{(l+2)^{s+1}}{s+1} \ll (\log x)^{s+1},$$

因此所需估计也成立。

(xvi) 当 $\operatorname{Re} s > 0$ 时, 由引理 1.3.1 我们有

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{\substack{n=1 \\ (n,r)=1}}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n^{1+s}} = \prod_{p \nmid r} \left(1 + \frac{1}{p^{1+s}}\right) \\ &= \frac{\zeta(1+s)}{\zeta(2(1+s))} \prod_{p|r} \left(1 + \frac{1}{p^{1+s}}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

令

$$b = \frac{1}{\log x}, T = x^{2/5}, \sigma = -\frac{1}{2} - \frac{c}{4(\log T)^2}, f(x) = x^{-1},$$

其中 c 为引理 2.3.1 中的常数。则由 (1)、(2) 及 $\zeta(1+b) = O(\log x)$, 可得

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n,r)=1}} \frac{|\mu(n)|}{n} = E + O\left(\frac{\log x}{T}\right) + \frac{1}{2\pi i} (I_1 + I_2 + I_3), \quad (23)$$

其中 E 为函数

$$G(s) = \frac{x^s}{s} \cdot \frac{\zeta(1+s)}{\zeta(2(1+s))} \prod_{p|r} \left(1 + \frac{1}{p^{1+s}}\right)^{-1}$$

在 $s = 0$ 处的残数, I_1, I_2 和 I_3 分别为 $G(s)$ 沿直线段 \overline{DC} 、 \overline{CB} 和 \overline{BA} 所取的积分, 点 A, B, C 与 D 由 σ, T 与 b 定义同上。设 x 充分大, 则由定理 1.3.6 的(ii) 及定理 2.3.1 的(ii), 我们有

$$\begin{aligned}
 I &= O\left(\int_{-T}^T x^{\sigma}(|t|+2)^{-(2+\sigma)/2}(\log x)^3 \tau_a(r) dt\right) \\
 &= O(T^{1/4} x^{-1/2}(\log x)^3 \tau_a(r)) = O(x^{-2/5}(\log x)^3 \tau_a(r)), \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2, I_3 &= O\left(\frac{1}{T}\left(\int_{\sigma}^0 (\log x)^3 \cdot x^u T^{-u/2} du + \int_0^b (\log x)^3 du\right) \tau_a(r)\right) \\
 &= O\left(\frac{1}{T}(\log x)^2 \tau_a(r)\right) = O(x^{-2/5}(\log x)^2 \tau_a(r)); \quad (25)
 \end{aligned}$$

其中用到估计: 当 $\operatorname{Re} s \geq \sigma$ 时, $\left| \prod_{p|r} (1 + p^{-1-s})^{-1} \right| \leq \tau_a(r)$ 。由于 0 为 $G(s)$ 的 2 阶极点, 所以由定理 1.3.5 的(ii) 与推论 1.4.9, 可得

$$\begin{aligned}
 E &= \lim_{s \rightarrow 0} \left[s x^s \cdot \frac{\zeta(1+s)}{\zeta(2(1+s))} \prod_{p|r} (1 + \frac{1}{p^{1+s}})^{-1} \left(\log x + \frac{1}{s} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{\zeta'(1+s)}{\zeta(1+s)} - 2 \frac{\zeta'(2(1+s))}{\zeta(2(1+s))} + \sum_{p|r} \frac{\log p}{p^{s+1} + 1} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{\zeta(2)} \prod_{p|r} (1 + \frac{1}{p})^{-1} \left(\log x + \sum_{p|r} \frac{\log p}{p+1} + c_1 \right), \quad (26)
 \end{aligned}$$

其中

$$c_1 = -2 \frac{\zeta'(2)}{\zeta(2)} + \frac{1}{2} \log \pi - \frac{1}{2} \frac{\Gamma'(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2})} + A + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{\rho_n(1 - \rho_n)},$$

其中 A 为推论 1.4.9 中的常数, 对 ρ_n 求和中 ρ_n 通过 $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点。由 (23) ~ (26) 式可见, (xvi) 得证。引理 2.3.2 证毕。

应指出的是, 在本章的应用中, 我们可把引理 2.3.2 中出现的 $e^{-\delta \sqrt{\log(3x)}}$ 都换成 $(\log(3x))^{-A}$ (这里 A 为常数, $A \geq 3$), 因为后者就已够用了。另外, 为了书写方便, 我们还可把含 $x^{3/5}(\log 3x)^3$ 的余项换成含 x^{1+a} 的余项, 这样也够用了。引理 2.3.2 中若干余

项都还能改进,但我们并不需要。

根据积性函数的定义,可以证明:

引理 2.3.3 (i) 设 n 为正整数, $f(n)$ 为积性函数, 则

$$\sum_{d|n} f(d) = \prod_{p^r \parallel n} (1 + f(p) + \cdots + f(p^r)),$$

这里 d, r 为正整数, p 为素数, $p^r \parallel n$ 表示 $p^r | n$ 但 $p^{r+1} \nmid n$ 。

(ii) 对于正整数 n ,

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

(iii) 对于正整数 n ,

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{若 } n = 1, \\ 0, & \text{若 } n > 1. \end{cases}$$

证明: (i) 设 n 的标准素因子分解式为 $n = p_1^{r_1} \cdots p_t^{r_t}$, 这里 p_1, \cdots, p_t 为不同的素数, r_1, \cdots, r_t 为正整数。则 d 取遍 n 所有不同的正整数因子, 且仅当 d 形如

$$d = p_1^{x_1} \cdots p_t^{x_t},$$

且每个整数 x_i 取过整数 $0, 1, \cdots, r_i$ 。所以, 由于 $f(d)$ 是积性函数, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} f(d) &= \sum_{0 \leq x_1 \leq r_1} \cdots \sum_{0 \leq x_t \leq r_t} f(p_1^{x_1} \cdots p_t^{x_t}) \\ &= \sum_{0 \leq x_1 \leq r_1} \cdots \sum_{0 \leq x_t \leq r_t} f(p_1^{x_1}) \cdots f(p_t^{x_t}) \\ &= \prod_{1 \leq i \leq t} \left(\sum_{0 \leq x_i \leq r_i} f(p_i^{x_i}) \right). \end{aligned}$$

(ii) 因为

$$\varphi(1) = 1, \varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}, \alpha \geq 1,$$

由(i) 可得(ii)。

(iii) 由于 $\mu(1) = 1, \mu(p) = -1, \mu(p^\alpha) = 0 (\alpha \geq 2)$, 由(a) 可得(c)。证毕。

本节的主要目的为证明下面的结果:

定理 2.3.4 设 $z \geq 3$,

$$\xi_d = \begin{cases} \mu(d) \frac{\log(z/d)}{\log z}, & d \leq z, \\ 0, & d > z, \end{cases}$$

则当 $N \geq 1$ 时

$$\sum_{1 \leq n \leq N} \left(\sum_{d|n} \xi_d \right)^2 = \frac{N}{(\log z)^2} \log(\min(N, z)) + O\left(\frac{N}{(\log z)^2}\right) + O(1).$$

证明: 分两种情况

(a) 当 $N \geq z^2$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq n \leq N} \left(\sum_{d|n} \xi_d \right)^2 &= \sum_{d_1 \leq N} \sum_{d_2 \leq N} \xi_{d_1} \xi_{d_2} \sum_{\substack{[d_1, d_2] | n \\ n \leq N}} 1 \\ &= \sum_{d_1 \leq N} \sum_{d_2 \leq N} \xi_{d_1} \xi_{d_2} \left(\frac{N}{[d_1, d_2]} + O(1) \right) \\ &= N \sum_{d_1 \leq z} \sum_{d_2 \leq z} \frac{\xi_{d_1} \xi_{d_2}}{d_1 d_2} (d_1, d_2) \\ &\quad + O\left(\left(\sum_{d \leq z} \left(1 - \frac{\log d}{\log z}\right)\right)^2\right). \end{aligned} \quad (27)$$

由引理 2.3.3 的(ii) 可知

$$(d_1, d_2) = \sum_{m | (d_1, d_2)} \varphi(m),$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{d_1 \leq z} \sum_{d_2 \leq z} \frac{\xi_{d_1} \xi_{d_2}}{d_1 d_2} (d_1, d_2) &= \sum_{m \leq z} \varphi(m) \sum_{\substack{d_1, d_2 \leq z \\ d_1 | m, d_2 | m}} \frac{\xi_{d_1} \xi_{d_2}}{d_1 d_2} \\ &= \sum_{m \leq z} \frac{\varphi(m)}{m^2} \left(\sum_{k \leq z/m} \xi_{mk} \frac{1}{k} \right)^2 \\ &= \sum_{m \leq z} \frac{|\mu(m)| \varphi(m)}{m^2} \left(\sum_{\substack{k \leq z/m \\ (k, m) = 1}} \frac{\mu(k)}{k} \right) \times \end{aligned}$$

$$\left(\log \frac{z}{m} - \log k\right)^2 \cdot \frac{1}{(\log z)^2}.$$

由引理 2.3.2 的(i) 和(iv), 得到

$$\sum_{\substack{k \leq z/m \\ (k, m)=1}} \frac{\mu(k)}{k} \left(\log \frac{z}{m} - \log k\right) = \frac{m}{\varphi(m)} + O\left((\tau_a(m))^2 \left(\log \frac{2z}{m}\right)^{-5}\right),$$

所以, 再由引理 2.3.2 的(viii) 和(xiii) 可得

$$\begin{aligned} (\log z)^2 \sum_{d_1 \leq z} \sum_{d_2 \leq z} \frac{\xi_{d_1} \xi_{d_2}}{d_1 d_2} (d_1, d_2) &= \sum_{m \leq z} \frac{|\mu(m)| \varphi(m)}{m^2} \times \\ &\quad \left(\frac{m^2}{\varphi^2(m)} + O\left(\frac{m}{\varphi(m)} (\tau_a(m))^2 \left(\log \frac{2z}{m}\right)^{-5}\right) \right. \\ &\quad \left. + O((\tau_a(m))^4 \left(\log \frac{2z}{m}\right)^{-10}) \right) \\ &= \sum_{m \leq z} \frac{|\mu(m)|}{\varphi(m)} + O\left(\sum_{m \leq z} m^{-1} (\tau_a(m))^2 \left(\log \frac{2z}{m}\right)^{-5}\right) \\ &\quad + O\left(\sum_{m \leq z} m^{-1} (\tau_a(m))^4 \left(\log \frac{2z}{m}\right)^{-10}\right) = \log z + O(1). \quad (28) \end{aligned}$$

由推论 1.1.4 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{d \leq z} \left(1 - \frac{\log d}{\log z}\right) &= [z] - \frac{1}{\log z} \left(\sum_{1 < d \leq z} \log d\right) \\ &= [z] - \frac{1}{\log z} \left(\int_1^z \log u \, du + \int_1^z \psi(u) \frac{1}{u} \, du - \psi(z) \cdot \frac{1}{\log z}\right) \\ &= [z] - z + \frac{z}{\log z} + O(1) = \frac{z}{\log z} + O(1). \quad (29) \end{aligned}$$

由(27)、(28) 及(29), 可知当 $z^2 \leq N$ 时定理 2.3.4 成立。

(b) 设 $z^2 > N \geq 1$ 。若自然数 n 的标准素因子分解式为 $n = p_1^{x_1} \cdots p_s^{x_s}$, $x_i \geq 1$, p_1, \dots, p_s 为不同的素数, 则由 $\Lambda(d)$ 的定义可得

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^s \sum_{d|p_i^{x_i}} \Lambda(d) = \sum_{i=1}^s x_i \log p = \log n,$$

因此, 应用引理 2.3.3 的(iii), 可得

$$\sum_{d|n} \mu(d) \log \frac{n}{d} = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{m|\frac{n}{d}} \Lambda(m) = \sum_{m|n} \Lambda(m) \sum_{d|\frac{n}{m}} \mu(d) = \Lambda(n),$$

于是, 当 $n > 1$ 时,

$$\sum_{d|n} \mu(d) \log d = -\Lambda(n). \quad (30)$$

我们有

$$\begin{aligned} (\log z)^2 \sum_{n \leq N} \left(\sum_{d|n} \xi_d \right)^2 &= \sum_{n \leq N} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \leq z}} \mu(d) \log \frac{z}{d} \right)^2 \\ &= (\log z)^2 + \sum_{2 \leq n \leq N} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \leq z}} \mu(d) \log \frac{z}{d} \right)^2. \end{aligned} \quad (31)$$

由 $N \leq z$, 则由(30)及引理 2.3.2 的(xi)可得

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq n \leq N} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \leq z}} \mu(d) \log \frac{z}{d} \right)^2 &= \sum_{2 \leq n \leq N} (\Lambda(n))^2 \\ &= N \log N + O(N). \end{aligned} \quad (32)$$

由(31)与(32), 可知 $N \leq z$ 时定理成立。设 $z^2 > N > z$, 则由(30)可得

$$\begin{aligned} \sum_{2 \leq n \leq N} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \leq z}} \mu(d) \log \frac{z}{d} \right)^2 &= \sum_{2 \leq n \leq N} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \leq n}} \mu(d) \log \frac{z}{d} - \sum_{\substack{d|n \\ d > z}} \mu(d) \log \frac{z}{d} \right)^2 \\ &= \sum_{2 \leq n \leq N} \left(\Lambda(n) - \sum_{\substack{d|n \\ d > z}} \mu(d) \log \frac{z}{d} \right)^2 \\ &= S_1 - 2S_2 + S_3, \end{aligned} \quad (33)$$

这里

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{2 \leq n \leq N} (\Lambda(n))^2, \\ S_2 &= \sum_{2 \leq n \leq N} \Lambda(n) \sum_{\substack{d|n \\ d > z}} \mu(d) \log \left(\frac{z}{d} \right), \end{aligned}$$

$$S_3 = \sum_{2 \leq n \leq N} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d > z}} \mu(d) \log\left(\frac{z}{d}\right) \right)^2.$$

我们有

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{z < p \leq N} \log p \left(\sum_{\substack{d|p \\ d > z}} \mu(d) \log\left(\frac{z}{d}\right) \right) \\ &\quad + O\left(\sum_{p \leq \sqrt{N}} (\log p) \sum_{\substack{d|p \\ d > z}} \left(\mu(d) \log \frac{z}{d} \right) \left(\sum_{\substack{m \leq \frac{\log z}{\log p}}} 1 \right) \right) \\ &= \sum_{z < p \leq N} \log p (\log p - \log z) + O(N^{1/2} (\log N)^2) \\ &= \sum_{z \leq n \leq N} (\Lambda(n))^2 - (\log z) \sum_{z < n \leq N} \Lambda(n) \\ &\quad + O(N^{1/2} (\log N)^2). \end{aligned}$$

所以由定理 1.6.1 的(iii) 和引理 2.3.2 的(xi) 可得

$$\begin{aligned} S_1 - 2S_2 &= - \sum_{n \leq N} (\Lambda(n))^2 + 2 \sum_{n \leq z} (\Lambda(n))^2 \\ &\quad - \log z (N - z + O(N(\log N)^{-3})) \\ &= N \log\left(\frac{z^2}{N}\right) + O(N). \end{aligned} \quad (34)$$

当 n 为满足 $2 \leq n \leq N$ 的正整数时, 显然成立着

$$\sum_{\substack{q|n \\ q > z}} \mu(q) \log\left(\frac{z}{q}\right) = \sum_{\substack{d|n \\ \frac{n}{d} > z}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \log\left(\frac{zd}{n}\right). \quad (35)$$

于是, 对于 S_3 , 我们得

$$\begin{aligned} S_3 &= \sum_{2 \leq n \leq N} \left(\sum_{\substack{d|n \\ \frac{n}{d} > z}} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \log\left(\frac{zd}{n}\right) \right)^2 \\ &= \sum_{d_1 < \frac{N}{z}} \sum_{d_2 < \frac{N}{z}} \sum_{\substack{d_1 | n, d_2 | n \\ N \geq n > d_1 z, d_2 z}} \mu\left(\frac{n}{d_1}\right) \mu\left(\frac{n}{d_2}\right) \log\left(\frac{zd_1}{n}\right) \log\left(\frac{zd_2}{n}\right). \end{aligned}$$

按 d_1 与 d_2 的最大公因子 (d_1, d_2) 对这个多重求和加以处理。设

$(d_1, d_2) = u$, 则 $u < \frac{N}{z}$. 当 u 取定时, 设 $d_1 = e_1 u, d_2 = e_2 u, (e_1, e_2) = 1$, 又设 $n = d_1 m_1 = d_2 m_2$, 则由 $e_1 m_1 = e_2 m_2$, 可得 $e_1 | m_2, e_2 | m_1$. 设 $m_1 = e_2 f, m_2 = e_1 f$, 则

$$\frac{n}{d_1} = m_1 = e_2 f, \frac{n}{d_2} = m_2 = e_1 f.$$

因此, 在 $(e_1 e_2, f) = 1$ 时,

$$\mu\left(\frac{n}{d_1}\right)\mu\left(\frac{n}{d_2}\right) = \mu(e_1)\mu(e_2) |\mu(f)|.$$

所以我们得到

$$S_3 = \sum_{u < \frac{N}{z}} \sum_{e_1 < \frac{N}{uz}} \mu(e_1) \sum_{\substack{e_2 < \frac{N}{uz} \\ (e_2, e_1) = 1}} \mu(e_2) \times \\ \sum_{\substack{N_1 \geq f > N_2 \\ (f, e_1 e_2) = 1}} |\mu(f)| \log\left(\frac{z}{e_1 f}\right) \log\left(\frac{z}{e_2 f}\right), \quad (36)$$

其中 $N_1 = \frac{N}{ue_1 e_2}, N_2 = z \max\left(\frac{1}{e_1}, \frac{1}{e_2}\right)$. 由引理 2.3.2 的 (x) 得

$$\sum_{\substack{N_1 \geq f > N_2 \\ (f, e_1 e_2) = 1}} |\mu(f)| \log \frac{e_1 f}{z} \log \frac{e_2 f}{z} \\ = \frac{N_1}{\zeta(2)} \frac{e_1 e_2}{k(e_1 e_2)} \left(\left(\log \frac{N_1 e_1}{z} - 1 \right) \left(\log \frac{N_1 e_2}{z} - 1 \right) + 1 \right) \\ + \frac{N_2 e_1 e_2}{\zeta(2) k(e_1 e_2)} \left(\log \left(\frac{N_2^2}{z^2} e_1 e_2 \right) - 2 \right) + O(x^{1+a} \tau_a(r) \log \frac{2x}{y_1} \log \frac{2x}{y_2}),$$

其中 $k(r) = r \prod_{p|r} \left(1 + \frac{1}{p}\right)$. 所以, 由引理 2.3.2 的 (xv)、(v) 与

(vi), 我们有 (其中 $a = -\frac{1}{3}$)

$$\sum_{\substack{e_2 < \frac{N}{kz} \\ (e_2, e_1) = 1}} \mu(e_2) \sum_{\substack{N_1 \geq f > N_2 \\ (f, e_1 e_2) = 1}} |\mu(f)| \log \frac{e_1 f}{z} \log \frac{e_2 f}{z}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{e_2 < \frac{N}{kz} \\ (e_2, e_1)=1}} \mu(e_2) \left[\frac{N}{\zeta(2)u} \cdot \frac{1}{k(e_1)k(e_2)} \left(\left(\log \left(\frac{N}{ue_2z} \right) - 1 \right) \right. \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(\log \left(\frac{N}{ue_1z} \right) - 1 \right) + 1 \right) \\
&\quad + \frac{z \max(e_1, e_2)}{\zeta(2)k(e_1)k(e_2)} \left(\log \left(\max \left(\frac{e_2}{e_1}, \frac{e_1}{e_2} \right) \right) - 2 \right) \Big] \\
&\quad + O \left(\left(\frac{N}{ue_1} \right)^{1+a} \tau_a(e_1) \log \left(\frac{2N}{ze_1} \right) \left(\sum_{e_2 < \frac{N}{z}} e_2^{-1-a} \tau_a(e_2) \log \left(\frac{2N_1 e_1}{z} \right) \right) \right) \\
&= \frac{N}{\zeta(2) \cdot u \cdot k(e_1)} \left[\left(\log \left(\frac{N}{ue_1z} \right) - 1 \right) \sum_{\substack{e_2 < \frac{N}{uz} \\ (e_2, e_1)=1}} \frac{\mu(e_2)}{k(e_2)} \log \left(\frac{N}{ue_2z} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left(2 - \log \left(\frac{N}{ue_1z} \right) \right) \sum_{e_2 < \frac{N}{uz}} \frac{\mu(e_2)}{k(e_2)} \right] \\
&\quad + \frac{z}{\zeta(2)k(e_1)} \sum_{\substack{e_2 < \frac{N}{uz} \\ (e_2, e_1)=1}} \mu(e_2) \frac{\max(e_1, e_2)}{k(e_2)} \left(\log \left(\max \left(\frac{e_2}{e_1}, \frac{e_1}{e_2} \right) \right) - 2 \right) \\
&\quad + O \left(\frac{N}{ue_1} \left(\frac{z}{e_1} \right)^a \tau_a(e_1) \log \left(\frac{2N}{ze_1} \right) \right) \\
&= \frac{N}{ue_1} \left(\log \left(\frac{N}{ue_1z} \right) - 1 \right) + O \left(\frac{N}{ue_1} (\tau_a(e_1))^2 \left(\log \frac{3N}{uz} \right)^{-5} \right) \\
&\quad + \frac{z}{\zeta(2)k(e_1)} \sum_{\substack{e_2 < \frac{N}{uz} \\ (e_2, e_1)=1}} \mu(e_2) \frac{\max(e_1, e_2)}{k(e_2)} \left(\log \left(\max \left(\frac{e_1}{e_2}, \frac{e_2}{e_1} \right) \right) - 2 \right) \\
&\quad + O \left(Nu^{-1} z^a e_1^{-1-a} \tau_a(e_1) \cdot \log \left(\frac{2N}{ze_1} \right) \right). \tag{37}
\end{aligned}$$

进一步,应用引理 2.3.2 的 (iv)、(i)、(xiv)、(v)、(vii) 与 (xv), 当 $u < N/z$ 且 u 固定时, 可知

$$\sum_{e_1 < \frac{N}{uz}} \frac{N \cdot \mu(e_1)}{ue_1} \left(\log \left(\frac{N}{ue_1z} \right) - 1 \right) = \frac{N}{u} + O \left(\frac{N}{u} \left(\log \frac{3N}{uz} \right)^{-5} \right),$$

$$\begin{aligned}
& O\left(\sum_{e_1 < \frac{N}{uz}} \frac{N}{ue_1} (\tau_a(e_1))^2 \left(\log \frac{3N}{uz}\right)^{-5}\right) = O\left(\frac{N}{u} \left(\log \frac{3N}{uz}\right)^{-4}\right), \\
& \sum_{e_1 < \frac{N}{uz}} \frac{z\mu(e_1)}{\zeta(2)k(e_1)} \sum_{\substack{e_2 < \frac{N}{uz} \\ (e_2, e_1)=1}} \mu(e_2) \frac{\max(e_1, e_2)}{k(e_2)} \left(\log\left(\max\left(\frac{e_1}{e_2}, \frac{e_2}{e_1}\right)\right) - 2\right) \\
&= \frac{z}{\zeta(2)} \sum_{\substack{e_1, e_2 < \frac{N}{uz} \\ (e_2, e_1)=1}} \frac{\mu(e_1)\mu(e_2)\max(e_1, e_2)}{k(e_1)k(e_2)} \left(\log\left(\max\left(\frac{e_1}{e_2}, \frac{e_2}{e_1}\right)\right) - 2\right) \\
&= \frac{2z}{\zeta(2)} \sum_{\substack{e_1 < e_2 < \frac{N}{uz} \\ (e_2, e_1)=1}} \frac{e_2\mu(e_1)\mu(e_2)}{k(e_1)k(e_2)} \left(\log \frac{e_2}{e_1} - 2\right) + O(z) \\
&= \frac{2z}{\zeta(2)} \sum_{e_2 < \frac{N}{uz}} \frac{e_2\mu(e_2)}{k(e_2)} \left[- \sum_{\substack{e_1 < e_2 \\ (e_1, e_2)=1}} \frac{\mu(e_1)}{k(e_1)} \log e_1 + (\log e_2 - 2) \right. \\
&\quad \cdot \left. \left(\sum_{\substack{e_1 < e_2 \\ (e_2, e_1)=1}} \frac{\mu(e_1)}{k(e_1)}\right)\right] + O(z) \\
&= \frac{2z}{\zeta(2)} \sum_{e_2 < \frac{N}{uz}} \frac{e_2\mu(e_2)}{k(e_2)} \left(\zeta(2) \frac{k(e_2)}{e_2} \right. \\
&\quad \left. + O((\tau_a(e_2))^2 (\log 3e_2)^{-5})\right) + O(z) \\
&= 2z \sum_{e_2 < \frac{N}{uz}} \mu(e_2) + O\left(z \sum_{e_2 < \frac{N}{uz}} (\tau_a(e_2))^2 (\log(3e_2))^{-5}\right) + O(z) \\
&= O\left(\frac{N}{u} \left(\log\left(\frac{3N}{uz}\right)\right)^{-5}\right) + O(z), \\
& O\left(\sum_{e_1 < \frac{N}{uz}} \frac{N}{u} z^a e_1^{-1-a} \tau_a(e_1) \log\left(\frac{2N}{ze_1}\right)\right) = O\left(\frac{N}{u} z^a \left(\frac{uz}{N}\right)^a\right) \\
&= O(N^{1-a} z^{2a} u^{a-1}).
\end{aligned}$$

因此,由(36)及(37)可得

$$S_3 = N\left(\sum_{u \leq \frac{N}{z}} \frac{1}{u}\right) + O\left(N \sum_{u \leq \frac{N}{z}} \frac{1}{u} \left(\log \frac{3N}{uz}\right)^{-4}\right)$$

$$+ O(N) + O(N^{1-a} z^{2a}). \quad (38)$$

应用引理 2.3.2 的(xii)、(xiii), 并注意到由 $N \leq z^2$ 可知

$$N^{1-a} z^{2a} = N^{4/3} z^{-2/3} = O(N),$$

从(38) 可得

$$S_3 = N \log \frac{N}{z} + O(N). \quad (39)$$

由(33)、(34) 及(39), 可知当 $z^2 \geq N > z$ 时成立着

$$\sum_{2 \leq n \leq N} \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \leq z}} \mu(d) \log \frac{z}{d} \right)^2 = N \log z + O(N). \quad (40)$$

由(31)、(32) 以及(40), 可知定理 2.3.4 在 $z^2 > N$ 时也成立。

证毕。

练 习

(I) 给出引理 2.3.2 的(d) 及(f) 的证明。

(II) 令 $f(n) = \begin{cases} \mu(s), & \text{若 } n = s^2, s \geq 1, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$

证明 $f(n)$ 为积性函数。由此, 应用定理 2.3.3 的(i), 证明

$$|\mu(n)| = \sum_{r^2 | n} \mu(r).$$

(III) 应用等式 $\sum_{d|n} \Lambda(d) = \log n$ (见本节(30) 式的推导), 给

出 § 1.4 的(33) 式新的证明。类似地, 证明若 $\operatorname{Re} s > 1$, 则

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}.$$

§ 2.4 L 函数的零点密度估计

设 $Q \geq 3, T \geq 3$, 以及 $5/6 \leq \alpha \leq 1$ 。对于正整数 $q, 3 \leq q \leq Q$, 以及模 q 的原特征 χ , 我们用 $N(\alpha, T, \chi)$ 表示函数 $L(s, \chi)$ 的满足 $\alpha \leq \operatorname{Re} \rho \leq 1$ 和 $|\operatorname{Im} \rho| \leq T$ 的非平凡零点 ρ 的个数 (一个零点是几阶的就被计数几次)。我们的目的是估计量

$$A(\alpha, T, Q) = \sum_{3 \leq q \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\alpha, T, \chi),$$

这里 $\sum_{\bmod q}^*$ 表示对模 q 的所有原特征求和。我们需要两个引理。

引理 2.4.1 设 $q \geq 3, \chi$ 为模 q 的一个原特征, $s_0 = 1 + it_0$, t_0 为一个实数, d 为一个正数, $d = O(1)$ 。若我们用 $M(d, s_0, \chi)$ 表示函数 $L(s, \chi)$ 的满足 $|s - s_0| \leq d$ 的非平凡零点的个数 (一个零点是几阶的就重复计数几次), 则有

$$M(d, s_0, \chi) = O(d \log(q(|t_0| + 2))) + O(1).$$

证明: 由推论 1.4.7, 对于 $s_1 = s_0 + d = 1 + d + it_0$, 我们有

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left(\frac{L'(s_1, \chi)}{L(s_1, \chi)} \right) + \frac{1}{2} \log \frac{q}{\pi} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma' \left(\frac{s_1 + \delta}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{s_1 + \delta}{2} \right)} \right) \\ = \sum_{n \geq 1} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s_1 - z_n} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\delta = 0$ 或 1 视 $\chi(-1) = 1$ 或 -1 而定。一方面, 若记 $z_n = \sigma_n + it_n, n \geq 1$, 则有

$$\sum_{n \geq 1} \operatorname{Re} \left(\frac{1}{s_1 - z_n} \right) = \sum_{n \geq 1} \frac{1 + d - \sigma_n}{(1 + d - \sigma_n)^2 + (t_0 - t_n)^2}$$

$$\begin{aligned}
&\geq \sum_{n \geq 1} \frac{d}{2(1 - \sigma_n)^2 + 2d^2 + (t_0 - t_n)^2} \\
&\geq \frac{d}{2} \cdot \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(1 - \sigma_n)^2 + d^2 + (t_0 - t_n)^2} \\
&\geq \frac{d}{2} \cdot \sum_{|s_0 - z_n| \leq d} \frac{1}{(1 - \sigma_n)^2 + d^2 + (t_0 - t_n)^2} \\
&\geq \frac{1}{4d} \cdot M(d, s_0, \chi),
\end{aligned}$$

另一方面,由推论 1.4.9 及定理 1.1.5 的(v) 可得

$$\begin{aligned}
\left| \operatorname{Re} \left(\frac{L'(s_1, \chi)}{L(s_1, \chi)} \right) \right| &\leq \left| \frac{L'(s_1, \chi)}{L(s_1, \chi)} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^{1+d}} \\
&= \left| \frac{\zeta'(d+1)}{\zeta(d+1)} \right| \ll d^{-1}, \\
\left| \operatorname{Re} \left(\frac{\Gamma' \left(\frac{s_1 + \delta}{2} \right)}{\Gamma \left(\frac{s_1 + \delta}{2} \right)} \right) \right| &\leq \log(|t_0| + 2).
\end{aligned}$$

因此,由(1) 可得

$$M(d, s_0, \chi) \ll 1 + d \log(q(|t_0| + 2)).$$

证毕。

引理 2.4.2 (i) 设 $\xi \geq 3$, q 为整数, $q \geq 3$, p 表示素数, 则

$$\sum_{p \leq \xi} \frac{1}{p} = \log \log \xi + O(1).$$

$$(ii) \prod_{p|q} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \ll \log \log (3q).$$

$$(iii) \frac{q}{\varphi(q)} \ll \log \log (3q).$$

证明:(i) 由引理 1.1.3 及定理 1.6.1 的(iv) 可得

$$\sum_{p \leq \xi} \frac{1}{p} = \sum_{2 < p \leq \xi} \frac{1}{p} + \frac{1}{2} = \int_2^{\xi} (\pi(u)) \cdot \frac{du}{u^2} + \pi(\xi) \cdot \frac{1}{\xi}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_2^{\xi} \left(\frac{u}{\log u} + O\left(\frac{u}{\log^2 u}\right) \right) \frac{du}{u^2} + O\left(\frac{1}{\log \xi}\right) \\
&= \int_2^{\xi} \frac{du}{u \log u} + O\left(\int_2^{\xi} \frac{du}{u (\log u)^2}\right) + O\left(\frac{1}{\log \xi}\right) \\
&= \log \log \xi + O(1).
\end{aligned}$$

(ii) 令 $k = \log(3q)$, 我们有

$$\begin{aligned}
\prod_{p|q} \left(1 + \frac{1}{p}\right) &= \exp\left(\sum_{p|q} \log\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right) \leq \exp\left(\sum_{p|q} \frac{1}{p}\right) \\
&\leq \exp\left(\sum_{p \leq k} \frac{1}{p} + \sum_{\substack{p|q \\ p > k}} \frac{1}{p}\right) \\
&\leq \exp\left(\log \log k + O(1) + \frac{1}{k} \cdot \frac{\log q}{\log 2}\right) \\
&\ll \log k = \log \log(3q);
\end{aligned}$$

其中用到(i) 以及 $\sum_{p|q} 1 \leq \frac{\log q}{\log 2}$.

(iii) 因为

$$\begin{aligned}
\frac{q}{\varphi(q)} &= \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \prod_{p|q} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \\
&\leq \prod_{p|q} \left(1 + \frac{1}{p}\right) \prod_{p \geq 2} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)^{-1} \\
&= \zeta(2) \prod_{p|q} \left(1 + \frac{1}{p}\right),
\end{aligned}$$

由(ii) 可得(iii)。证毕。

我们要证明的关于 L 函数零点密度估计的结果为:

定理 2.4.3 设 $Q \geq 3, T \geq 3, \frac{5}{6} \leq \alpha \leq 1$. 对于正整数 q ,

$q \geq 3$, 及模 q 的原特征 χ , 我们用 $N(\alpha, T, \chi)$ 表示函数 $L(s, \chi)$ 的满足

$$\rho = \sigma + it, \alpha \leq \sigma \leq 1, |t| \leq T$$

的非平凡零点 ρ 的个数(其中同一个零点是几阶的就重复计数几次),则

$$\begin{aligned} A(\alpha, T, Q) &= \sum_{3 \leq q \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N(\alpha, T, \chi) \\ &\ll (TQ^2)^{\frac{7}{2}(1-\alpha)} (\log \log (QT))^3, \end{aligned}$$

这里 $\sum_{\chi \bmod q}^*$ 表示对模 q 的全体原特征 χ 求和。

证明:令 $L = \log (Q(T+2))$, 并记

$$\begin{aligned} D &= \{s \mid s = u + ib, \alpha \leq u \leq 1, -T \leq b \leq T\}, \\ D_r &= \{s \mid s = u + ib, \alpha \leq u \leq 1, rL^{-1} \leq b \leq (r+1)L^{-1}\}, \quad (2) \end{aligned}$$

这里 r 为整数。显然,存在唯一的正整数 $Y, Y < \frac{1}{2}(LT+2)$, 使得

$$(2Y-2)L^{-1} < T \leq 2YL^{-1}.$$

令

$$D^{(0)} = \bigcup_{\substack{|r| \leq 2Y \\ 2|r}} D_r, \quad D^{(1)} = \bigcup_{\substack{|r| \leq 2Y+1 \\ 2 \nmid r}} D_r,$$

则 $D \subseteq D^{(0)} \cup D^{(1)}$,

$$N(\alpha, T, \chi) \leq N^{(0)}(\alpha, T, \chi) + N^{(1)}(\alpha, T, \chi),$$

$$A(\alpha, T, Q) \leq A^{(0)}(\alpha, T, Q) + A^{(1)}(\alpha, T, Q),$$

其中 $N^{(j)}(\alpha, T, \chi)$ 表示 $L(s, \chi)$ 的满足 $\rho \in D^{(j)}$ 的非平凡零点个数,一个零点是几阶的就被重复计算几次,而

$$A^{(j)}(\alpha, T, Q) = \sum_{3 \leq q \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* N^{(j)}(\alpha, T, \chi), j = 0, 1.$$

我们来估计 $N^{(0)}(\alpha, T, Q)$ 。由定理 1.5.2, 存在绝对常数 $c_2, 0 < c_2 < \frac{1}{2}$, 使得当 $1 - \alpha \leq c_2 L^{-1}$ 时, $A^{(0)}(\alpha, T, Q) \leq 1$, 设 QT 充分大, 且

$$c_2 L^{-1} < 1 - \alpha \leq \frac{1}{6}.$$

对给定的正整数 $q, 3 \leq q \leq Q$, 模 q 的原特征 χ , 及每个 $r, 2|r, |r| \leq 2Y, D_r$ 中或至少含有 $L(s, \chi)$ 的一个零点或不含有 $L(s, \chi)$ 的零点。

令 $\mathcal{A}(q, \chi) = \{r | r \text{ 为整数}, 2|r, |r| \leq 2Y, D_r \text{ 中至少含有一个 } L(s, \chi) \text{ 的零点}\}$ 。

设 $\mathcal{A}(q, \chi)$ 中共有 K 个元素, $K = K(q, \chi)$, 并将 K 个整数依由小至大的顺序记为 $r(1), \dots, r(K)$ 。我们可在每个 $D_{r(v)}$ 中取定一个 $L(s, \chi)$ 的零点 $\rho_v = \rho_v(\chi), 1 \leq v \leq K$, 并记 $\rho_v = \sigma_v + it_v, s_v = 1 + it_v$ 。注意到, 当 $s \in D_{r(v)}$ 时,

$$|s - s_v| \leq \sqrt{(1 - \alpha)^2 + L^{-2}} \leq (1 + c_2^{-2})^{\frac{1}{2}}(1 - \alpha)。$$

因此, 若用 $N_v(q, \chi)$ 记 $D_{r(v)}$ 中 $L(s, \chi)$ 的非平凡零点个数(几阶零点就被重复计数几次), 则由引理 2.4.1, 我们有

$$\begin{aligned} N^{(0)}(\alpha, T, \chi) &\ll \sum_{1 \leq v \leq K} N_v(q, \chi) \ll K \cdot (1 + (1 - \alpha)L) \\ &\ll K \cdot (1 - \alpha)L, \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} A^{(0)}(\alpha, T, Q) &\ll (1 - \alpha)L \sum_{3 \leq q \leq Q} \sum_{\chi \bmod q}^* K(q, \chi) \\ &= (1 - \alpha)L \cdot J。 \end{aligned} \quad (3)$$

下面我们估计 J 。令 $\epsilon = 10^{-2}$ 。设 QT 充分大, 使得 $(QT)^\epsilon > 3$ 。在定理 2.2.2 中令 $R = z = (QT)^\epsilon, x = (Q^2T)^{\frac{7}{4}(1-\epsilon)}, y = x(\log x)^2 > z, f(n) = \mu(n)\varphi(n), \chi(n)$ 为模 q 的任一原特征, $3 \leq q \leq Q$, 以及

$$\begin{aligned} a(n) &= \sum_{d|n} \xi_d, \\ \xi_d &= \begin{cases} \mu(d) \frac{\log z/d}{\log z}, & d \leq z, \\ 0, & d > z, \end{cases} \end{aligned}$$

则对于 $L(s, \chi)$ 的任一满足 $\frac{5}{6} \leq \alpha \leq \operatorname{Re} \rho \leq 1$ 的非平凡零点 ρ , 我们有

$$e^{-1/x} = - \sum_{\substack{2 \leq n \leq y \\ r \leq R}} a(n) \chi(n) f_r(n) n^{-\rho} e^{-n/x} + O(L^{-1})$$

其中 r 为任一正整数。由 $e^{-1/x} = 1 + O\left(\frac{1}{x}\right)$ 可得

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{\substack{(r, q)=1 \\ r \leq R}} \frac{|\mu(r)|}{r} \right) (1 + O(L^{-1})) \\ &= - \sum_{2 \leq n \leq y} a(n) \chi(n) n^{-\rho} e^{-n/x} \cdot \left(\sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q)=1}} \frac{|\mu(r)|}{r} f_r(n) \right). \quad (4) \end{aligned}$$

令

$$B = \{(q, \chi, s) \mid 3 \leq q \leq Q, \chi \text{ 为模 } q \text{ 的原特征}, s = \rho_v(\chi)$$

$$- \alpha, 1 \leq v \leq K(q, \chi)\},$$

其中 $K(q, \chi)$ 及 $\rho_v(\chi)$ 的定义同上。设 $N = [y^2]$, 而

$$\phi_1 = 1, \phi_n = \begin{cases} a(n) n^{-\alpha} e^{-n/x}, & \text{若 } 2 \leq n \leq y, \\ 0, & \text{若 } y < n \leq N, \end{cases}$$

$$\lambda_{n, q} = \sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q)=1}} \frac{|\mu(r)|}{r} f_r(n), n \geq 1,$$

$$b_n = n^{-1}(e^{-n/x} - e^{-n}), n \geq 1.$$

由定理 2.1.1 的(ii), 我们得

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{(q, \chi, s) \in B} \left| \sum_{2 \leq n \leq y} a(n) \chi(n) n^{-s-\alpha} e^{-n/x} \left(\sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q)=1}} \frac{|\mu(r)|}{r} f_r(n) \right) \right| \right)^2 \\ &= \left(\sum_{(q, \chi, s) \in B} \left| \sum_{n=1}^N \phi_n \lambda_{n, q} \chi(n) n^{-s} \right| \right)^2 \leq \left(\sum_{n \leq y} |\phi_n|^2 b_n^{-1} \right) \times \\ & \left(\sum_{(q, \chi, s) \in B} \sum_{(q', \chi', s') \in B} \left| \sum_{n \leq N} b_n \bar{\chi}_{n, q} \lambda_{n, q'} \bar{\chi}(n) \chi'(n) n^{-s'-\bar{s}} \right| \right). \quad (5) \end{aligned}$$

由于当 $n \geq 1$ 时, $n\left(\frac{2}{x} - 1\right) \leq -\frac{1}{2}$,

$$e^{-2n/x}(e^{-n/x} - e^{-n})^{-1} = (e^{n/x} - e^{n(\frac{2}{x}-1)})^{-1} \leq (1 - e^{-\frac{1}{2}})^{-1},$$

所以

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq y} |\phi_n|^2 b_n^{-1} &= (e^{-1/x} - e^{-1})^{-1} \\ &+ \sum_{2 \leq n \leq y} |a(n)|^2 n^{1-2\alpha} e^{-2n/x} (e^{-n/x} - e^{-n})^{-1} \\ &\leq (1 - e^{-\frac{1}{2}})^{-1} \sum_{2 \leq n \leq y} |a(n)|^2 n^{1-2\alpha} + O(1). \end{aligned} \quad (6)$$

由分部求和(引理 1.1.3) 及定理 2.3.4, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{1 < n \leq y} |a(n)|^2 n^{1-2\alpha} &= - \int_1^y \left(\sum_{1 \leq n \leq u} |a(n)|^2 - 1 \right) (1 - 2\alpha) u^{1-2\alpha} du \\ &+ \left(\sum_{1 \leq n \leq y} |a(n)|^2 - 1 \right) y^{1-2\alpha} \\ &= - \int_1^y \left(\frac{u \log(\min(u, z))}{(\log z)^2} \right. \\ &\quad \left. + O\left(\frac{u}{(\log z)^2}\right) \right) (1 - 2\alpha) u^{-2\alpha} du \\ &+ \left(\frac{y}{\log z} + O\left(\frac{y}{\log z}\right) \right) y^{1-2\alpha} - 1 \\ &= \frac{1}{2 - 2\alpha} \cdot \frac{y^{2-2\alpha}}{\log z} + O\left(\frac{y^{2-2\alpha}}{(\log z)^2}\right) - 1. \end{aligned} \quad (7)$$

由(6)、(7), 以及

$$y^{2-2\alpha} = e^{(2-2\alpha)\log y} \geq 2(1 - \alpha)\log y > 2(1 - \alpha)\log z,$$

可得

$$\sum_{n \leq y} |\phi_n|^2 b_n^{-1} \ll \frac{y^{2-2\alpha}}{(1 - \alpha)\log z} \ll y^{2-2\alpha}. \quad (8)$$

我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq N} b_n \lambda_{n, q} \bar{\lambda}_{n, q'} \bar{\chi}(n) \chi'(n) n^{-s' - \bar{s}} &= \sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q) = 1}} \sum_{\substack{r' \leq R \\ (r', q') = 1}} \frac{|\mu(r)\mu(r')|}{r r'} \\ &\times \left(\sum_{n \leq N} f_r(n) f_{r'}(n) b_n \bar{\chi}(n) \chi'(n) n^{-s' - \bar{s}} \right). \end{aligned} \quad (9)$$

由 § 2.2 的(13), 可知

$$\begin{aligned} b_n &= n^{-1}(e^{-n/x} - e^{-n}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{K \rightarrow +\infty} \left(\int_{2-iK}^{2+iK} \Gamma(\omega) \left(\left(\frac{n}{x} \right)^{-\omega} - n^{-\omega} \right) n^{-1} d\omega \right), \end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned} & \sum_{n \leq N} f_r(n) f_{r'}(n) b_n \bar{\chi}(n) \chi'(n) n^{-s'-s} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{K \rightarrow +\infty} \left(\int_{2-iK}^{2+iK} \Gamma(\omega) (x^\omega - 1) \right. \\ & \quad \cdot \left(\sum_{n \leq y^2} f_r(n) f_{r'}(n) \bar{\chi}(n) \chi'(n) n^{-1-s'-\bar{s}-\omega} \right) d\omega. \end{aligned} \quad (10)$$

对于给定的 $q, q', \chi, \chi', s, s'$ 及 r, r' , 若 $(q, \chi, s) \in B, (q', \chi', s') \in B, \mu(r)\mu(r') \neq 0, (r, q) = 1, (r', q') = 1$, 设 $\bar{\chi}(n)\chi'(n) = \chi_1(n)$ 及 $s' + \bar{s} = s_1$, 则 $\chi_1(n)$ 是模 $[q, q']$ 的特征, 且由 $\text{Re } s' \geq 0, \text{Re } \bar{s} \geq 0$, 可知 $\text{Re } s_1 \geq 0$, 我们有

$$|f_r(n)| = |f((r, n))| \leq \varphi((r, n)) \leq (r, n) \leq r,$$

并且, 类似地可知 $|f_{r'}(n)| \leq r'$ 。所以, 当 $\text{Re } \omega = 2$ 时,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{n > y^2} f_r(n) f_{r'}(n) \chi_1(n) n^{-s_1-\omega-1} \right| \\ & \leq r r' \sum_{n > y^2} n^{-3} = O(r r' y^{-4}). \end{aligned}$$

因此, 由于 $f_r(n), f_{r'}(n)$ 及 $\chi_1(n)$ 都是积性函数, 由引理 1.3.1 我们得

$$\begin{aligned} & \sum_{n \leq y^2} f_r(n) f_{r'}(n) \chi_1(n) n^{-s_1-\omega-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f_r(n) f_{r'}(n) \chi_1(n) n^{-s_1-\omega-1} + O(r r' y^{-4}) \\ &= \prod_p \left(1 + \sum_{t \geq 1} f_r(p^t) f_{r'}(p^t) (\chi_1(p))^t p^{-t(s_1+\omega+1)} \right) \\ & \quad + O(r r' y^{-4}). \end{aligned} \quad (11)$$

由于 $\mu(r)\mu(r') \neq 0$, 所以当 $t \geq 1$ 时, $f_r(p^t) = f_r(p)$, $f_{r'}(p^t) = f_{r'}(p)$ 。因此, 若将素数 p 分成 (a)、(b)、(c) 三类, 这里 (a) $p \mid rr'$, (b) $p \mid (r, r')$, 及 (c) $p \nmid rr'$ 但 $p \nmid (r, r')$, 则由 f 的定义可知 (11) 右端的无穷乘积为

$$\begin{aligned} & \prod_{p \nmid rr'} (1 - \chi_1(p)p^{-g})^{-1} \prod_{p \mid (r, r')} \left(1 + f^2(p) \frac{\chi_1(p)p^{-g}}{1 - \chi_1(p)p^{-g}} \right) \\ & \quad \cdot \prod_{\substack{p \nmid rr' \\ p \mid (r, r')}} \left(1 + f(p) \frac{\chi_1(p)p^{-g}}{1 - \chi_1(p)p^{-g}} \right) \\ & = L(g, \chi_1) L_1(g, \chi_1) L_2(g, \chi_1), \end{aligned} \quad (12)$$

其中 $g = s_1 + 1 + \omega$,

$$\begin{aligned} L_1(g, \chi_1) &= \prod_{p \mid (r, r')} (1 + (f^2(p) - 1)\chi_1(p)p^{-g}), \\ L_2(g, \chi_2) &= \prod_{\substack{p \nmid rr' \\ p \mid (r, r')}} (1 + (f(p) - 1)\chi_1(p)p^{-g}). \end{aligned}$$

令 $\sigma = \operatorname{Re}(s_1) = \operatorname{Re}(s' + \bar{s})$, $A = 2 - iK$, $B = 2 + iK$, $C = -1/2 - \sigma + iK$ 及 $D = -1/2 - \sigma - iK$, 并记 χ_0 为模 $[q, q']$ 的主特征。由残数定理, 我们有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{2-iK}^{2+iK} \Gamma(\omega)(x^\omega - 1)L(g, \chi_1)L_1(g, \chi_1)L_2(g, \chi_2)d\omega \\ & = E(\chi_1, r, r', s' + \bar{s}, x) + \frac{1}{2\pi i}(I_1 + I_2 + I_3), \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $E(\chi_1, r, r', s' + \bar{s}, x)$ 在 $\chi_1 \neq \chi_0$ 时为零, 而在 $\chi_1 = \chi_0$ 时则为函数

$$G(\omega) = \Gamma(\omega)(x^\omega - 1)L(g, \chi_1)L_1(g, \chi_1)L_2(g, \chi_2)$$

在 1 阶极点 $\omega = -s_1 = -(s' + \bar{s})$ 处的残数, I_1, I_2 与 I_3 分别为函数 $G(\omega)$ 沿复 ω 平面上的直线段 \overline{AD} 、 \overline{DC} 与 \overline{CB} 的积分。这里我们已注意到, $\omega = 0$ 为函数

$$\Gamma(\omega)(x^\omega - 1)$$

的可去奇点, 因此, 若 $s_1 = 0, \chi_1 = \chi_0$, 则 $\omega = 0$ 仍为 $G(\omega)$ 的 1 阶极点。由定理 1.2.2 的 (vi) 可知, 若 $\chi_1 = \chi_0$, 则 $q = q', \chi(n) = \chi'(n)$ 。因此, 在 $\chi_1 = \overline{\chi\chi'} = \chi_0$ 时,

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \Gamma(\omega)(x^\omega - 1)L(g, \chi_0)L_1(g, \chi_0)L_2(g, \chi_0) \\ &= \Gamma(\omega)(x^\omega - 1)\zeta(g)\prod_{p|q}(1-p^{-g})\prod_{\substack{p|[r, r'] \\ p \nmid (r, r')}}(1-p^{1-g}) \\ &\quad \cdot \prod_{p|(r, r')}(1+(p-2)p^{1-g}). \end{aligned} \quad (14)$$

注意, $L_2(1, \chi_0)$ 的值当 $[r, r'] \neq (r, r')$ 时为 0, 当 $[r, r'] = (r, r')$ 时为 1, 而若 $[r, r'] = (r, r')$, 则必 $r = r'$ 。由 (14) 及定理 1.3.5 的 (ii) 可得

$$E = \begin{cases} \Gamma(-s_1)(x^{-s_1} - 1) \frac{\varphi(q)}{q} \prod_{p|r}(p-1), & \text{若 } \chi = \chi', q = q', r = r', s_1 \neq 0, \\ (\log x) \cdot \frac{\varphi(q)}{q} \prod_{p|r}(p-1), & \text{若 } \chi = \chi', q = q', r = r', s_1 = 0, \\ 0, & \text{否则;} \end{cases} \quad (15)$$

这里我们简记 $E = E(\chi_1, r, r', s' + \bar{s}, x)$, 并已注意到

$$\prod_{p|q} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{\varphi(q)}{q},$$

以及

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \Gamma(\omega)(x^\omega - 1) = \lim_{\omega \rightarrow 0} (\omega \Gamma(\omega)) \cdot \lim_{\omega \rightarrow 0} \left(\frac{x^\omega - 1}{\omega} \right) = \log x.$$

接下来我们估计 (13) 右端的三个积分。为估计 $G(\omega)$, 设 $\omega = \beta +$

it, β 与 t 为实数。设 $K > 3T$ 。当 $-1/2 - \sigma \leq \beta \leq 2, |t| = K$ 时, 由定理 1.1.5 的(iv) 可知

$$\Gamma(\omega) = O(e^{-\frac{\pi}{3}K}).$$

当 $\beta = -1/2 - \sigma, |t| \leq 1$ 时, 由于 $0 \leq \sigma \leq 2(1 - \alpha) \leq 1/3$, 所以 $-5/6 \leq \beta \leq -1/2, 1/6 \leq 1 + \beta \leq 1/2$, 因此由定理 1.1.5 的(ii) 可知

$$\Gamma(\omega) = \frac{|\Gamma(1 + \omega)|}{|\omega|} \ll \Gamma(1 + \beta) \ll 1.$$

当 $\beta = -1/2 - \sigma, 1 < |t| \leq K$ 时, 由定理 1.1.5 的(iv) 可知

$$\Gamma(\omega) = O(e^{-\frac{\pi}{3}|t|}).$$

当 $-1/2 - \sigma \leq \beta \leq 2$ 时, 由 $g = 1 + \omega + s_1$ 可知 $1/2 \leq \operatorname{Re}(g) = 1 + \beta + \sigma \leq 3 + \sigma$, 所以(注意: $\mu(r)\mu(r') \neq 0$)

$$\begin{aligned} |L_1(g, \chi_1)| &\leq \prod_{p \mid (r, r')} (1 + (p^2 - 2p)p^{-1/2}) \\ &\leq \prod_{p \mid (r, r')} p^{3/2} = (r, r')^{3/2}, \\ |L_2(g, \chi_2)| &\leq \prod_{\substack{p \mid [r, r'] \\ p \nmid (r, r')}} (1 + (p - 2)p^{-1/2}) \\ &\leq \prod_{\substack{p \mid [r, r'] \\ p \nmid (r, r')}} p^{1/2} = \left(\frac{[r, r']}{(r, r')} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

当 $-1/2 - \sigma \leq \beta \leq 2$ 时, $1/2 \leq \operatorname{Re}(g) \leq 3 + \sigma$ 。对于给定的 q 及 q' , 简记 $[q, q'] = m$ 。并同上, 设 $\chi_0(n)$ 为模 m 的主特征。当 $\chi_1 = \chi\bar{\chi} \neq \chi_0$ 时, 设 χ_1 是由模 q_1 的原特征 χ'_1 诱导出的, $q_1 \mid m, q_1 \geq 3$ 。则 $\chi_1(n) = \chi_0(n)\chi'_1(n)$,

$$L(g, \chi_1) = L(g, \chi'_1) \prod_{\substack{p \mid m \\ p \nmid q_1}} \left(1 - \frac{\chi'_1(p)}{p^g} \right).$$

当 $-1/2 - \sigma \leq \beta \leq 2, |t| = K$ 时, 由 $g = 1 + \omega + s_1, \text{Res} = \sigma, |\text{Im}s_1| \leq 2T < K$, 可知 $1/2 \leq \text{Re}(g) \leq 3 + \sigma, |\text{Im}g| \ll K$, 所以由定理 1.3.6 的(i) 可得

$$\begin{aligned} L(g, \chi'_1) &= O((q_1 K)^{1/4} \cdot \log(q_1 K)) \\ &= O((mK)^{1/4} \log(mK)), \end{aligned}$$

$$L(g, \chi_1) = O((mK)^{1/4} \log(mK) F(m)),$$

这里我们简记 $F(m) = \prod_{p|m} (1 + p^{-1/2})$ 。当 $\beta = -1/2 - \sigma, \text{Reg} =$

$1/2$ 时, 若 $|t| \leq 1$, 则 $\text{Im}g = O(T)$,

$$L(g, \chi'_1) = O((q_1 T)^{1/4} \log(q_1 T)),$$

$$L(g, \chi_1) = O((mT)^{1/4} \log(mT) \cdot F(m)),$$

而若 $1 < |t| \leq K$, 则因 $\text{Im}g = O(|t| + T)$, 我们有

$$L(g, \chi'_1) = O((q_1(|t| + T))^{1/4} \log(q_1(|t| + T))),$$

$$L(g, \chi_1) = O((m(|t| + T))^{1/4} \log(m(|t| + T)) F(m))。$$

综合这些结论, 当 $-1/2 - \sigma \leq \beta \leq 2, |t| = K$ 时,

$$G(\omega) = O(x^2 e^{-\pi K/3} (r, r') [r, r']^{1/2} (mK)^{1/4} \log(mK) \cdot F(m)),$$

当 $\beta = -1/2 - \sigma, |t| \leq 1$ 时,

$$\begin{aligned} G(\omega) &= O(x^{-1/2-\sigma} (mT)^{1/4} \log(mT) \times \\ &\quad F(m) \cdot (r, r') [r, r']^{1/2}), \end{aligned}$$

当 $\beta = -1/2 - \sigma, 1 < |t| \leq K$ 时,

$$\begin{aligned} G(\omega) &= O(x^{-1/2-\sigma} (m(|t| + T))^{1/4} e^{-\pi |t|/3} \log(m(|t| + T)) \times \\ &\quad F(m)(r, r') [r, r']^{1/2})。 \end{aligned}$$

于是, 我们得

$$I_1, I_3 = O(x^2 e^{-\pi K/3} (mK)^{1/4} \log(mK) F(m) [r, r']^{1/2} (r, r')),$$

(16)

$$I_2 = O(x^{-1/2-\sigma} [r, r']^{1/2} (r, r') m^{1/4} F(m) \times$$

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^1 T^{1/4} \log(mT) dt + \int_1^T T^{1/4} e^{-\pi t/3} \log(mT) dt \right. \\
& \quad \left. + \int_T^K t^{1/4} \log(mt) e^{-\pi t/3} dt \right) \\
& = O(x^{-1/2-\sigma} [r, r']^{1/2} (r, r') (mT)^{1/4} \log(mT) F(m)). \quad (17)
\end{aligned}$$

由(10) ~ (13), (16) 及(17), 可知

$$\begin{aligned}
& \sum_{n \leq N} f_r(n) f_{r'}(n) b_n \bar{\chi}(n) \chi'(n) n^{-s'-\bar{s}} \\
& = E(\bar{\chi} \chi', r, r', s' + \bar{s}, x) + O(x^{-\frac{1}{2}-\sigma} [r, r']^{1/2} \times \\
& \quad (r, r') (mT)^{1/4} \log(mT) F(m)) + O(r r' x^2 y^{-4}), \quad (18)
\end{aligned}$$

这里 E 由(15) 给出, $m = [q, q']$, $F(m) = \prod_{p|m} (1 + p^{-1/2})$, 并且

我们已用到了由定理 1.1.5 可得的估计: 对充分大的 K ,

$$\begin{aligned}
\int_{-K}^K |\Gamma(2+it)| dt &= \int_{-1}^1 |\Gamma(2+it)| dt + \int_1^K |\Gamma(2+it)| dt \\
&\quad + \int_{-K}^{-1} |\Gamma(2+it)| dt \\
&= O(1) + O\left(\int_1^K e^{-\pi t/3} dt\right) = O(1).
\end{aligned}$$

由(9)、(15) 及(18), 可得

$$\begin{aligned}
& \sum_{n \leq N} b_n \lambda_{n, q} \lambda_{n, q'} \bar{\chi}(n) \chi'(n) n^{-s'-\bar{s}} \\
& = \sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q)=1}} \sum_{\substack{r' \leq R \\ (r', q')=1}} \frac{|\mu(r) \mu(r')|}{rr'} E(\bar{\chi} \chi', r, r', s' + \bar{s}, x) \\
& \quad + O(x^{-1/2} (mT)^{1/4} F(m) \log(mT) \Delta_1) + O(R^2 y^{-4} x^2) \\
& = \sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q)=1}} \frac{|\mu(r)|}{r^2} \prod_{p|r} (p-1) \cdot E_1(x, \chi, \chi', s' + \bar{s}) \\
& \quad + O(x^{-1/2} (mT)^{1/4} F(m) \log(mT) R) + O(R^2 y^{-4} x^2);
\end{aligned}$$

其中用到

$$\begin{aligned}\Delta_1 &= \sum_{r \leq R} \sum_{r' \leq R} \frac{(r, r') [r, r']^{1/2}}{r r'} = \sum_{r \leq R} \sum_{r' \leq R} (r r')^{-1/2} (r, r')^{1/2} \\ &\ll \sum_{d \leq R} d^{-1/2} \left(\sum_{r \leq R/d} n^{-1/2} \right)^2 \ll R \sum_{d \leq R} d^{-3/2} \ll R,\end{aligned}$$

而

$$E_1(x, \chi, \chi', s' + \bar{s}) = \begin{cases} \log x, & \\ \Gamma(-s' - \bar{s})(x^{-s' - \bar{s}} - 1), & \text{若 } q = q', \chi = \chi', s + \bar{s}' = 0, \\ 0, & \text{若 } q = q', \chi = \chi', s + \bar{s}' \neq 0, \\ & \text{否则.} \end{cases}$$

因此, 由 $\prod_{p|r} (p-1) = \varphi(r) \leq r, m \leq Q^2, F(m) \leq \prod_{p|m} 2 \leq \tau(m) \ll Q^{\varepsilon/4}$ (见引理 2.3.2 的(ii)), (3), 以及引理 2.3.2 的(xii), 我们有

$$\begin{aligned}& \sum_{(q, \chi, s) \in B} \sum_{(q', \chi', s') \in B} \left| \sum_{n \leq N} b_n \chi_n, q \lambda_n, q' \bar{\chi}(n) \chi'(n) n^{-s' - \bar{s}} \right| \\ & \ll \sum_{(q, \chi, s) \in B} \left(\sum_{r \leq R} \frac{1}{r} \right) \log x + \sum_{(q, \chi, s) \in B} \left(\sum_{r \leq R} \frac{1}{r} \right) \sum_{s'} |x^{-s' - \bar{s}} - 1| \times \\ & \quad |\Gamma(-\bar{s} - s')| + J^2(x^{-\frac{1}{2}}(Q^{2+\varepsilon}T)^{\frac{1}{4}}LR + R^2\gamma^{-4}x^2) \\ & \ll L^2J + L \cdot \sum_{(q, \chi, s) \in B} \sum_{s'} |x^{-s' - \bar{s}} - 1| |\Gamma(-\bar{s} - s')| \\ & \quad + J^2(x^{-1/2}(Q^{2+\varepsilon}T)^{1/4}LR + R^2\gamma^{-4}x^2), \tag{19}\end{aligned}$$

其中 $\sum_{s'}$ 表示对于满足 $(q, \chi, s') \in B$ 且 $\bar{s} + s' \neq 0$ 的 s' 求和。

当 $(q, \chi, s) \in B, (q, \chi, s') \in B, s' \neq -\bar{s}$ 时,

$$0 \leq \operatorname{Re}(\bar{s} + s') \leq 2(1 - \alpha),$$

$$\frac{2}{3} \leq 1 - 2(1 - \alpha) \leq \operatorname{Re}(1 - (\bar{s} + s')) \leq 1,$$

因此, 由定理 1.1.5 的(i) 及(ii), 我们总有估计

$$|(\bar{s} + s')\Gamma(-(\bar{s} + s'))|$$

$$= |\Gamma(1 - (\bar{s} + s'))| \leq \Gamma(1) = 1. \quad (20)$$

而且, 当 $|\operatorname{Im}(\bar{s} + s')| \geq 1$ 时, 由定理 1.1.5 的(iv) 还有

$$|\Gamma(-(\bar{s} + s'))| \ll e^{-\frac{\pi}{3} |\operatorname{Im}(\bar{s} + s')|}. \quad (21)$$

对于固定的 $(q, \chi, s) \in B$, 我们将(19)中的求和 $\sum_{s'}$ 拆成三部分 \sum_{11} , \sum_{12} 及 \sum_{13} , 分别相应于 $\sum_{s'}$ 中满足 $\operatorname{Im}(s + s') = 0, 0 < |\operatorname{Im}(\bar{s} + s')| \leq 3L$ 及 $|\operatorname{Im}(\bar{s} + s')| > 3L$ 的部分。若 s' 被计数于 \sum_{11} 中, 则由 B 的构造, 唯一可能出现的情况是 $s = s' = \rho_v - \alpha$ 对某个 $v (1 \leq v \leq K(q, \chi))$ 成立, 并且此时 $\operatorname{Re}(\rho_v - \alpha) \neq 0$ (否则 $s' + \bar{s} = 0$ 了)。由于这时 $\bar{s} + s'$ 为实数, 我们有

$$|x^{-s'-\bar{s}} - 1| = \left| \int_0^{\bar{s}+s'} e^{-u \log x} du \right| \log x \leq (\bar{s} + s') \log x,$$

因此, 由(20) 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{11} |x^{-s'-\bar{s}} - 1| |\Gamma(-\bar{s} - s')| \\ & \ll \log x |\Gamma(1 - (\bar{s} + s'))| \ll L. \end{aligned} \quad (22)$$

进一步将 \sum_{12} 拆成两部分 \sum_{121} 及 \sum_{122} , 分别相应于 \sum_{12} 中 s' 满足 $\operatorname{Im}s' > \operatorname{Im}s$ 及 $\operatorname{Im}s' < \operatorname{Im}s$ 的部分。当 s' 被计数于 \sum_{121} 且 $\operatorname{Im}s' > \operatorname{Im}s$ 时, 存在至多 p 个互不相交的形如(2) 的小区域 $D_{t(1)}, \dots, D_{t(p)}, p = O(L^2)$, 使得 s' 必落入某个 $D_{t(j)}$ 之中, 且当 $s' \in D_{t(j)}$ 时, $\operatorname{Im}s' - \operatorname{Im}s \geq \frac{j}{L}, j \geq 1$ 。于是, 由(20) 可得(用到引理 2.3.2 的(i))

$$\begin{aligned} & \sum_{121} |x^{-s'-\bar{s}} - 1| |\Gamma(-\bar{s} - s')| \ll \sum_{121} |\Gamma(-\bar{s} - s')| \\ & \ll \sum_{121} \frac{|\Gamma(1 - \bar{s} - s')|}{|\bar{s} + s'|} \ll \sum_{1 \leq j \leq p} \frac{L}{j} \ll L \cdot \log L. \end{aligned} \quad (23)$$

同样地可得

$$\sum_{122} |x^{-s'-\bar{s}} - 1| |\Gamma(-\bar{s} - s')| \ll L \cdot \log L. \quad (24)$$

若 s' 被计数于 \sum_{13} 中, 则 $|\operatorname{Im}(\bar{s} + s')| > 3L$, 因而由 (21) 可知

$$|\Gamma(-(\bar{s} + s'))| \ll e^{-\frac{\pi}{3}(3L)} \ll (QT)^{-3}.$$

因为当 $(q, \chi, s') \in B$ 且 q 及 χ 已给定时, s' 的个数 $\leq K(q, \chi) = O(TL)$, 所以

$$\begin{aligned} & \sum_{13} |(x^{-s-s'} - 1)| |\Gamma(-\bar{s} - s')| \\ & \ll \sum_{13} |\Gamma(-\bar{s} - s')| \ll (QT)^{-3} TL = O((QT)^{-1}). \end{aligned} \quad (25)$$

由 (3), (22) ~ (25), 我们得

$$\sum_{(q, \chi, s) \in B} \sum_{s'} |(x^{-s-s'} - 1) \Gamma(-\bar{s} - s')| \ll JL \cdot \log L. \quad (26)$$

由 (5)、(8)、(19) 及 (26), 可得

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{(q, \chi, s) \in B} \left| \sum_{2 \leq n \leq \gamma} a(n) \chi(n) n^{-s-\alpha} e^{-n/x} \left(\sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q)=1}} \frac{|\mu(r)|}{r} f_r(n) \right) \right| \right)^2 \\ & \ll J \cdot y^{2-2\alpha} L^2 \log L + J^2 y^{1/3} (x^{-1/2} (Q^{2+\varepsilon} T)^{1/4} LR + R^2 y^{-4} x^2) \\ & \ll J \cdot y^{2-2\alpha} L^2 \log L + J^2. \end{aligned} \quad (27)$$

由引理 2.3.2 的 (xvi)、(ii) 及引理 2.4.2 的 (ii), 可知当 $q \leq Q$ 时,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{r \leq R \\ (r, q)=1}} \frac{|\mu(r)|}{r} & \geq \frac{1}{\zeta(2)} \prod_{p|q} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1} (\log R + c_1) + O(R^{-2/5+\varepsilon}) \\ & \gg \frac{\log R}{\log \log(3Q)} \gg \frac{L}{\log L}. \end{aligned}$$

因此, 由 (4) 及 (27), 我们得

$$\begin{aligned} \frac{L^2}{(\log L)^2} \cdot J^2 & \ll \left(\sum_{(q, \chi, s) \in B} \left(\sum_{\substack{(r, q)=1 \\ r \leq R}} \frac{|\mu(r)|}{r} (1 + O(L^{-1})) \right) \right)^2 \\ & \ll J \cdot y^{2-2\alpha} L^2 \log L + J^2. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} J^2 \cdot L^2 (\log L)^{-2} & \ll J \cdot y^{2-2\alpha} L^2 \log L, \\ J & \ll y^{2-2\alpha} (\log L)^3. \end{aligned} \quad (28)$$

由于

$$(1-\alpha)L \ll e^{\frac{\varepsilon}{2}(1-\alpha)\log(Q^2T)} = (Q^2T)^{\frac{\varepsilon}{2}(1-\alpha)},$$

由(3)与(28)就得到估计

$$A^{(0)}(\alpha, T, Q) \ll (Q^2T)^{\frac{7}{2}(1-\alpha)}(\log L)^2.$$

类似地,我们可得到

$$A^{(1)}(\alpha, T, Q) \ll (Q^2T)^{\frac{7}{2}(1-\alpha)}(\log L)^2.$$

因此

$$\begin{aligned} A(\alpha, T, Q) &\leq A^{(0)}(\alpha, T, Q) + A^{(1)}(\alpha, T, Q) \\ &\ll (Q^2T)^{\frac{7}{2}(1-\alpha)}(\log L)^3. \end{aligned}$$

证毕。

注意:迄今为止无论采用 Turán、Gallagher、Jutila、Motohashi 或陈景润的方法都无法将定理 2.4.3 中的 $\log \log$ 型因子去掉(这些人的工作中都有错,[16] 中的相关的处理也如此,因此[14] 等文中关于 Glodbach 问题例外集的结果是证不出的)。

练 习

(I) 应用引理 2.3.2 的(xvi)与 § 1.6 的练习(II),在证明定理 2.4.3 方法的基础上,证明若将 $\lambda_{n,q}$ 的定义换成 $(f_r(n))$ 的定义不变)

$$\lambda_{n,q} = \left(\frac{q}{\varphi(q)}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{r \leq R \\ (r,q)=1}} \frac{|\mu(r)|}{r} f_r(n), n \geq 1,$$

则可将定理 2.4.3 中的 $(\log \log QT)^3$ 改进为 $(\log \log QT)^{3/2}$ 。

§ 2.5 ζ 函数的零点密度估计

在本节中,我们要用类似于上节中的方法,导出关于 ζ 函数

的类似的零点密度估计。设 $T \geq 3, 5/6 \leq \alpha \leq 1$, 用 $N(\alpha, T)$ 表示 ζ 函数的满足条件

$$\alpha \leq \operatorname{Re} \rho \leq 1, |\operatorname{Im} \rho| \leq T$$

的零点 ρ 的个数, 这里同样的零点是几阶就被重复计数几次。在定理 2.2.2 中取 $q = 1, \chi(n) \equiv 1 (n \geq 1), f(n) = \mu(n)\varphi(n)$, 则对 $\zeta(s)$ 的任一满足 $\rho = u + ib, 5/6 \leq u \leq 1$ 及 $|b| \leq T$ 的零点 ρ , 我们有

$$\begin{aligned} & e^{-1/x} + \sum_{2 \leq n \leq y} a(n) f_r(n) n^{-\rho} e^{-n/x} \\ &= \Gamma(1-\rho) x^{1-\rho} M((\xi_d), 1, f, r, \rho, 1-\rho) \\ &+ O(x^{1/2-\alpha} r z^{1/2}), \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $x > z \geq 3, y = x(\log x)^2, r$ 为正整数, $r \leq R, R \geq 3, \{\xi_d\}$ 为任一组满足 $\xi_1 = 1$ 和 $|\xi_d| \leq |\mu(d)|$, 以及当 $d > z$ 时 $\xi_d = 0$ 的实数, 而

$$a(n) = \sum_{d|n} \xi_d.$$

我们仍选取

$$\xi_d = \begin{cases} \mu(d) \frac{\log(z/d)}{\log z}, & d \leq z, \\ 0, & d > z. \end{cases}$$

令 $\varepsilon = \frac{1}{100}$, 设 T 充分大, 使得 $T^\varepsilon > 3$, 并取

$$R = z = T^\varepsilon, \quad x = T^{\frac{7}{4}(1-\varepsilon)}.$$

若 $|\operatorname{Im} \rho| \geq (\log T)^2$, 则由定理 1.1.5 的(iv) 可知

$$\Gamma(1-\rho) = O(e^{-\frac{\pi}{3}(\log T)^2}).$$

又因为

$$M((\xi_d), 1, f, r, \rho, 1-\rho) = \sum_{d \leq z} \xi_d f_r(d) d^{-1} \prod_{p \mid \frac{r}{(r,d)}} (1 + p^{-1}(f(p) - 1))$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{d \leq z \\ d \equiv 0 \pmod{r}}} \xi_d f_r(d) d^{-1} \\
&= \left(\sum_{\substack{d \leq z \\ r \mid d}} \frac{\mu(d) \log(z/d)}{d} \right) \frac{f(r)}{\log z} \\
&= \frac{\varphi(r) |\mu(r)|}{r \cdot \log z} \left(\sum_{\substack{m \leq z/r \\ (m, r) = 1}} \frac{\mu(m)}{m} \log \frac{z}{mr} \right) \\
&= O\left(\sum_{m \leq z} \frac{1}{m} \right) = O(\log z),
\end{aligned}$$

所以这时

$$\Gamma(1-\rho) x^{1-\rho} M((\xi_d), 1, f, r, \rho, 1-\rho) = O(T^{-\epsilon}). \quad (2)$$

由(1)与(2)得

$$1 + O(T^{-\epsilon}) = - \sum_{2 \leq n \leq y} a(n) f_r(n) n^{-\rho} e^{-n/x}. \quad (3)$$

基于(3),我们可证明关于 ζ 函数的零点密度估计:

定理 2.5.1 设 $T \geq 3, 5/6 \leq \alpha \leq 1, N(\alpha, T)$ 表示 $\zeta(s)$ 的满足 $\rho = u + iv, \alpha \leq u \leq 1$ 及 $|v| \leq T$ 的所有非平凡零点的个数(k 阶零点被重复计数 k 次, $k \geq 1$), 则

$$N(\alpha, T) \ll T^{\frac{7}{2}(1-\alpha)} (\log \log 3T)^3.$$

为证明定理 2.5.1, 先证明一个引理。

引理 2.5.2 设 $s_0 = 2 + it_0, t_0$ 为实数, $d > 0, M(d, s_0)$ 表示 $\zeta(s)$ 的满足 $|s - s_0| \leq d$ 的非平凡零点个数(k 阶零点被重复计数 k 次), 则

$$M(d, s_0) = O(d \log(|t_0| + 2)) + O(1).$$

证明: 可应用推论 1.4.9, 与引理 2.4.1 类似地加以证明。证毕。

定理 2.5.1 的证明: 令 $L = \log T$,

$$D = \{s \mid s = u + it, \alpha \leq u \leq 1, L^2 \leq |t| \leq T\},$$

$$D_r = \{s \mid s = u + it, \alpha \leq u \leq 1,$$

$$rL^{-1} \leq |t| \leq (r+1)L^{-1} \cap D,$$

其中 r 为整数。存在唯一的正整数 $Y, \frac{TL}{2} \leq Y < \frac{1}{2}(LT+2)$, 使得

$$(2Y-2)L^{-1} < T \leq 2YL^{-1}.$$

若令

$$D^{(0)} = \bigcup_{\substack{|r| \leq 2Y \\ 2 \mid r}} D_r, D^{(1)} = \bigcup_{\substack{|r| \leq 2Y+1 \\ 2 \nmid r}} D_r,$$

则 $D \subseteq D^{(0)} \cup D^{(1)}$ 。我们用 $N(\alpha, T_1, T_2)$ 表示 $\zeta(s)$ 的满足

$$\rho = u + iv, \alpha \leq u \leq 1, T_1 \leq |v| \leq T_2$$

的非平凡零点的个数, 这里 $0 < T_1 < T_2$ 。于是,

$$N(\alpha, T, L^2) \leq N^{(0)}(\alpha, T, L^2) + N^{(1)}(\alpha, T, L^2),$$

此处 $N^{(j)}(\alpha, T, L^2)$ 为 $\zeta(s)$ 的属于 $D^{(j)}$ 的零点个数 (k 阶零点就被重复计算 k 次, $k \geq 1$), $j = 0, 1$ 。由定理 1.5.8, 可知存在正的绝对常数 c , 使得当 $1 - \alpha \leq cL^{-1}$ 时, $N(\alpha, T, L^2) = 0$ 。为此我们可设 T 充分大, 且

$$\frac{1}{6} \geq 1 - \alpha > cL^{-1}.$$

我们估计 $N^{(0)}(\alpha, T, L^2)$ 。对每个 $r, 2 \mid r, |r| \leq 2Y, D_r$ 中或至少含有 $\zeta(s)$ 的一个零点, 或不含有 $\zeta(s)$ 的任何零点。令

$$A = \{r \mid 2 \mid r, |r| \leq 2Y, D_r \text{ 中至少含有一个 } \zeta(s) \text{ 的零点}\}.$$

不妨设 A 中共有 K 个整数, $1 \leq K = O(Y) = O(LT)$, 记为 $r(1), \dots, r(K)$ 。我们在每个 $D_{r(v)}$ 中取定一个 $\zeta(s)$ 的零点 $\rho_v, 1 \leq v \leq K$, 并设 $\rho_v = \sigma_v + it_v, \sigma_v = 1 + it_v, L^2 \leq |t_v| \leq T$ 。当 $s \in D_{r(v)}$ 时,

$$|s - s_v| \leq \sqrt{(1 - \alpha)^2 + L^{-2}} \leq (1 - \alpha)(1 + c^{-2})^{\frac{1}{2}},$$

所以若用 N_v 记 $D_{r(v)}$ 中零点的个数 (一个零点是几阶就被重复计数几次), $1 \leq v \leq K$, 则由引理 2.5.2, 我们有

$$N^{(0)}(\alpha, T, L^2) = \sum_{1 \leq v \leq K} N_v \ll K \cdot (1 + (1 - \alpha)L). \quad (4)$$

我们来估计 K 。令

$$P = \sum_{1 \leq v \leq K} \left(\sum_{2 \leq n \leq y} a(n) \left(\sum_{r \leq R} \frac{|\mu(r)| f_r(n)}{r} \right) n^{-\rho_v} e^{-n/x} \right), \quad (5)$$

则由(3)可得

$$P = - \left(\sum_{r \leq R} \frac{|\mu(r)|}{r} \right) K(1 + O(T^{-\epsilon})). \quad (6)$$

我们可与 § 2.4 的(5) ~ (27) 中类似地估计 P , 并且这时的情况相当于“ $q = q' = 1, \chi(n) = \chi'(n) = 1(n \geq 1)$ ”这种非常简单的情况。于是, 相应于 § 2.4 的(27), 我们得到

$$P^2 \ll K \cdot y^{2-2\alpha} L^2 \log L + K^2. \quad (7)$$

由(6)、(7), 以及引理 2.3.2 的(xvi), 可得

$$K^2 L^2 \ll K \cdot y^{2-2\alpha} L^2 \log L + K^2,$$

所以

$$K^2 \ll K \cdot y^{2-2\alpha} \log L, K \ll y^{2-2\alpha} \cdot \log L. \quad (8)$$

因为

$$1 + (1 - \alpha)L \ll e^{\epsilon^{(1-\alpha)}L} \ll T^{\epsilon^2(1-\alpha)},$$

所以由(4) 及(8), 我们得到估计

$$N^{(0)}(\alpha, T, L^2) \ll T^{\frac{7}{2}(1-\alpha)} \log \log (3T).$$

用类似的方法也可得

$$N^{(1)}(\alpha, T, L^2) \ll T^{\frac{7}{2}(1-\alpha)} \log \log (3T).$$

因此
$$N(\alpha, T, L^2) \ll T^{\frac{7}{2}(1-\alpha)} \log \log (3T). \quad (9)$$

若用 L^2 代 T (设 T 充分大), 则由(9) 给出

$$N(\alpha, L^2, 4(\log L)^2) \ll (\log T)^{7(1-\alpha)} \log \log \log (9T). \quad (10)$$

由(9) 与(10) 可得

$$N(\alpha, T, 4(\log L)^2) \ll T^{\frac{7}{2}(1-\alpha)} \log \log (3T). \quad (11)$$

由定理 1.5.11 的(iii) 的(b), 可知满足 $|\operatorname{Im} \rho| \leq 4(\log L)^2$ 的 $\zeta(s)$ 的非平凡零点的个数

$$\ll (\log L)^2 \log(4(\log L)^2) \ll (\log \log 3T)^3.$$

所以由(11)可得定理 2.5.2 的结论。证毕。

练 习

(I) 证明若 $\frac{3}{4} < \alpha \leq 1$, 则当 $T \geq 3$, $c(\alpha) = \frac{1}{4\alpha - 3}$ 时,

$$N(\alpha, T) \ll T^{c(\alpha)(1-\alpha)} (\log \log 3T)^3.$$

第三章

BDH 均值和

§ 3.1 引言

我们把下面的均值和称为 BDH(Barban-Davenport-Halberstam) 均值和:

$$S(Q, x) = \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} (\psi(x; q, a) - \frac{1}{\varphi(q)} \psi(x, \chi_q^0))^2,$$

其中 $x \geq Q \geq 3$,

$$\psi(x; q, a) = \sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n), \psi(x, \chi_q^0) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \chi_q^0(n),$$

$\Lambda(n)$ 为 von Mangoldt 函数, $\chi_q^0(n)$ 为模 q 主特征, $\varphi(q)$ 为 Euler 函数。

自 1963 年起,应用大筛法和“Siegel 定理”, Barban、Davenport、Halberstam、Gallagher、Montgomery 以及 Hooley 都曾研究过 $S(Q, x)$ 的上界与渐近公式。我们认为“Siegel 定理”不仅是一种非实效的语言游戏,而且在其证明中含有严重的逻辑错误,故这些数学家的工作其实都仅有很小的价值,而若我们采用 Davenport 的书[2]中 § 29 中的方法,则由于在 p. 171 上 Q_1 至多可取为 $(\log x)^{2-\delta}$ (对充分小的正数 δ ; 参见我们书中的定理 1.5.13

以及[2]的 § 20 中的 p. 123 上的讨论), 因此, 仅当

$$x(\log x)^{-1+\delta} \leq Q \leq x \quad (0)$$

时, 我们才能获得形如

$$S(Q, x) \ll xQ \log x \quad (1)$$

的上界估计。

我们将在 § 3.2 中对 $S(Q, x)$ 的下界进行深入研究, 我们所用的创造性方法是对经典的圆法加以变化而来的, 并且我们还要用到大筛法和 L 函数的零点密度估计。为了回避使用证明起来较为坚涩的“Gallagher 引理”(其证明要用到实分析 L^2 理论中的 Plancherel 定理), 我们在 § 3.2 中特别设计了一种初等的处理方法。在 § 3.3 中, 我们将获得 $S(Q, x)$ 的显含 L 函数“例外零点”的一个渐近展开式; 作为其推论, 我们既可在 Q 对 x 的某些范围内获得更为精密的下界估计, 又可在 Q 对 x 的某些范围内获得 $S(Q, x)$ 的渐近公式。§ 3.3 中的公式表明: 若要获得当 $Q < x$ 且 Q 位于范围(0)之外时的形如(1)的上界估计, 就必须对 L 函数的“例外零点”的上界作进一步的假设; 这实际上解决了一个长期悬而未决的问题, 即能否在不对 L 函数的“例外零点”作额外假设的情况下, 无条件地使得当 $Q(Q < x)$ 位于较大变化范围时上界估计(1)仍成立。§ 3.3 中的工作不仅要用到圆法(即所谓“Hardy-Littlewood 方法”)中的一些处理方法以及 L 函数的零点密度估计方法, 还要处理某些形式上十分复杂的求和。

§ 3.2 BDH 均值和的下界

在本节中我们要证明下述结果:

定理 3.2.1 设 c 为一个适当小的正数, x 充分大, 且

$$x \exp\left(\frac{-c \log x}{\log \log x}\right) \leq Q \leq x,$$

则

$$S(Q, x) \geq \frac{1}{2}(1 + O(c))Qx \log x.$$

这个结果已改进了[9]中的相应结果。我们先证明两个引理。

引理 3.2.2 设 $\tau \geq 3$, 则对任意实数 α , 都存在整数 a 及 q , $(a, q) = 1, 1 \leq q \leq \tau$, 使得(注意: a 有可能等于 0, 这时 $q = 1$)

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{q\tau}.$$

证明: 考虑 $k = [\tau] + 1$ 个属于区间 $[0, 1]$ 中的数 $m\alpha - [m\alpha]$, $1 \leq m \leq k$ 。若其中有一个数 $m_1\alpha - [m_1\alpha]$ 落在区间 $[0, \frac{1}{k}]$ 中, 则由

$$0 \leq m_1\alpha - [m_1\alpha] \leq \frac{1}{k},$$

可得

$$\left| \alpha - \frac{[m_1\alpha]}{m_1} \right| \leq \frac{1}{m_1 k} < \frac{1}{m_1 \tau},$$

因此, 若设 $\frac{[m_1\alpha]}{m_1} = \frac{a}{q}, q \geq 1, (a, q) = 1$, 则有

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{q\tau}, 1 \leq q \leq \tau.$$

设 k 个数 $\alpha - [\alpha], \dots, k\alpha - [k\alpha]$ 中没有一个落入区间 $[0, 1/k]$ 中。

将区间 $(\frac{1}{k}, 1]$ 分成 $k-1$ 个等份, 即

$$\left(\frac{1}{k}, 1\right] = \left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}\right] \cup \left(\frac{2}{k}, \frac{3}{k}\right] \cup \dots \cup \left(\frac{k-1}{k}, 1\right],$$

则必有两个数 $m_2\alpha - [m_2\alpha]$ 与 $m_3\alpha - [m_3\alpha]$ 落入同一个小区间

$(\frac{i}{k}, \frac{i+1}{k}]$ 中, $1 \leq i \leq k-1$, 这里 $1 \leq m_2 < m_3 \leq k$ 。因此

$$|(m_3\alpha - [m_3\alpha]) - (m_2\alpha - [m_2\alpha])| < \frac{1}{k},$$

$$|\alpha - \frac{[m_3\alpha] - [m_2\alpha]}{m_3 - m_2}| < \frac{1}{(m_3 - m_2)k}.$$

此时, 若设 $\frac{[m_3\alpha] - [m_2\alpha]}{m_3 - m_2} = \frac{a}{q}$, $(a, q) = 1$, $q \geq 1$, $q | (m_3 - m_2)$, 则仍有

$$|\alpha - \frac{a}{q}| < \frac{1}{q\tau}, 1 \leq q \leq \tau.$$

证毕。

引理 3.2.3 设 $X \geq 3$, 则

$$\sum_{n \leq X} \frac{1}{\varphi(n)} = c_1 \log X + \gamma c_1 - c_2 + O\left(\frac{(\log X)^2}{X}\right),$$

这里 γ 为 Euler 常数 (见引理 2.3.2 的 (xii)), 而

$$c_1 = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{|\mu(d)|}{d\varphi(d)}, c_2 = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{|\mu(d)| \log d}{d\varphi(d)d}.$$

证明: 对于正整数 n , 由 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的值及引理 2.3.3 的 (i), 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varphi(n)} &= \frac{1}{n} \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \frac{1}{n} \prod_{p|n} \left(1 + \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}\right)\mu(p)\right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu(d) \prod_{p|d} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}\right). \end{aligned}$$

所以, 交换求和并应用引理 2.3.2 的 (xii), 可得

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq X} \frac{1}{\varphi(n)} &= \sum_{d \leq X} \frac{\mu(d)}{d} \prod_{p|d} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}\right) \left(\sum_{m \leq X/d} \frac{1}{m}\right) \\ &= (\log X + \gamma) \sum_{d \leq X} \frac{\mu(d)}{d} \prod_{p|d} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{d \leq X} \frac{\mu(d) \log d}{d} \prod_{p|d} \left(1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}\right) \\
& + O\left(\frac{1}{X} \sum_{d \leq X} |\mu(d)| \prod_{p|d} \left|1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}\right|\right) \\
& = c_1(\log X + \gamma) - c_2 + O(\log X \cdot \sum_{d > X} \frac{|\mu(d)|}{d\varphi(d)}) \\
& + O\left(\sum_{d > X} \left(\frac{|\mu(d)| \log d}{d\varphi(d)}\right) + O\left(\frac{1}{X} \sum_{d \leq X} \frac{|\varphi(d)|}{\varphi(d)}\right)\right);
\end{aligned}$$

这里我们已用到: 当 $\mu(d) \neq 0$ 时(此时 d 是不同素数的乘积)

$$\prod_{p|d} \left|1 - \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}\right| = \prod_{p|d} \frac{1}{p-1} = \prod_{p|d} \frac{1}{\varphi(p)} = \frac{1}{\varphi(d)}.$$

应用引理 2.4.2 的(iii) 可得(又参见 § 1.6 的(5) 式)

$$\begin{aligned}
\log X \cdot \sum_{d > X} \frac{|\mu(d)|}{d\varphi(d)} & \ll \sum_{d > X} \frac{|\mu(d)| \log d}{d\varphi(d)} \ll \sum_{d > X} \frac{(\log d)^2}{d^2} \\
& \ll \sum_{d=[X]}^{\infty} \int_d^{d+1} \frac{(\log u)^2}{u^2} du \ll \int_{[X]}^{\infty} \frac{(\log u)^2}{u^2} du \\
& \ll \frac{(\log X)^2}{X}.
\end{aligned}$$

由引理 2.3.2 的(viii), 可知

$$\sum_{d \leq X} \frac{|\mu(d)|}{\varphi(d)} \ll \log X.$$

因此, 引理 3.2.3 成立。证毕。

其实在证明定理 3.2.1 时, 我们只需要由引理 3.2.3 产生的上界估计:

$$\sum_{n \leq X} \frac{1}{\varphi(n)} \ll \log X,$$

但引理 3.2.3 中确立的渐近公式将在 § 3.3 中用到。

一个定义在有限区间 $[a, b]$ 上的函数 $f(x)$ (可能取复值) 被称为是有界变差的, 是指对 $[a, b]$ 的任何一组分点 $x_i, 0 \leq i \leq$

$N + 1$,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N+1} = b,$$

求和

$$\sum_{i=0}^N |f(x_{i+1}) - f(x_i)|$$

都有一个一致的上界 M 。我们有

引理 3.2.4 若 $f(x)$ 为有限区间 $[a, b]$ 上的实值有界变差函数, 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是 Riemann 可积的。

证明: 任取 $[a, b]$ 的一组分点 $x_0, x_1, \cdots, x_{N+1}$,

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N < x_{N+1} = b,$$

令 $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ 。按定义, 只要证明, 当 $\max_{0 \leq i \leq N} (\Delta x_i) \rightarrow 0$ 时,

$$\sum_{0 \leq i \leq N} (\omega_i - \xi_i) \Delta x_i \rightarrow 0,$$

这里

$$\omega_i = \sup_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x), \delta_i = \inf_{x_i \leq x \leq x_{i+1}} f(x)。$$

由假设不难验证 ω_i 和 δ_i 都是有限的数(事实上, 可知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是一致有界的)。任取小正数 ϵ , 按定义, 存在 $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $\xi'_i \in [x_i, x_{i+1}]$, 使得

$$\omega_i - \frac{\epsilon}{2} < f(\xi_i), \delta_i + \frac{\epsilon}{2} > f(\xi'_i),$$

因此

$$0 \leq \omega_i - \delta_i < \epsilon + f(\xi_i) - f(\xi'_i) \leq \epsilon + |f(\xi_i) - f(\xi'_i)|,$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{0 \leq i \leq N} (\omega_i - \delta_i) \Delta x_i \leq \epsilon(b-a) \\ &\quad + \max_{0 \leq i \leq N} (\Delta x_i) \left(\sum_{0 \leq i \leq N} |f(\xi_i) - f(\xi'_i)| \right). \end{aligned}$$

不妨设 $\xi_i \leq \xi'_i$ 。在 $[a, b]$ 的分点 x_i 与 x_{i+1} 之间加入 ξ_i 与 ξ'_i , 将全体分点 $x_0, \xi_0, \xi'_0, x_1, \cdots, x_i, \xi_i, \xi'_i, x_{i+1}, \cdots, x_{N+1}$ 记为 $y_0, y_1, \cdots, y_{K+1}$ 。则因 f 是有界变差函数, 必有常数 $M > 0$, 使得

$$\sum_{0 \leq i \leq N} |f(\xi_i) - f(\xi'_i)| \leq \sum_{0 \leq i \leq K} |f(y_{i+1}) - f(y_i)| \leq M.$$

所以我们得到

$$0 \leq \sum_{0 \leq i \leq N} (\omega_i - \delta_i) \Delta x_i \leq \varepsilon(b-a) + M \cdot \max_{0 \leq i \leq N} (\Delta x_i).$$

由于 ε 是任意的正数, 令 $\varepsilon \rightarrow 0$, 可得

$$0 \leq \sum_{0 \leq i \leq N} (\omega_i - \delta_i) \Delta x_i \leq M \cdot \max_{0 \leq i \leq N} (\Delta x_i).$$

因此, 在 $\max_{0 \leq i \leq N} (\Delta x_i) \rightarrow 0$ 时,

$$\sum_{0 \leq i \leq N} (\omega_i - \delta_i) \Delta x_i \rightarrow 0.$$

这说明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是 Riemann 可积的。证毕。

引理 3.2.5 设 $A > 0, \lambda$ 为实数, 并令

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{\varepsilon}^A \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt \\ &+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-A}^{-\varepsilon} \frac{\sin(\lambda t)}{t} dt = F(\lambda, A). \end{aligned}$$

(关于极限的存在性, 见定理 2.2.1 的(i)) 则

(i) 当 $\lambda = 0$ 时, $F(A, \lambda) = 0$ 。

(ii) 当 $|\lambda| \geq 1$ 时, $F(A, \lambda) = \frac{\lambda}{|\lambda|} \pi + O\left(\frac{1}{|\lambda|A}\right)$ 。

(iii) 当 $0 < |\lambda| < 1$ 时, $F(A, \lambda) = \frac{\lambda}{|\lambda|} \pi + O(1)$, 且这里的 O -常数与 A 及 λ 无关。

证明: (i) 这是显然的。

(ii) 在定理 2.2.1 的(i) 中, 我们已证明了

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_\varepsilon^1 \frac{\sin x}{x} dx + \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

通过变量替换, 可知

$$\int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx = - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\varepsilon}^{-1} \frac{\sin x}{x} dx + \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{-N}^{-1} \frac{\sin x}{x} dx$$

$$= -\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_1^{\varepsilon} \frac{\sin x}{x} dx + \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_1^N \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

于是,可定义

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{\sin x}{x} dx = \pi.$$

当 $\lambda \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} F(A, \lambda) &= \int_{-A\lambda}^{A\lambda} \frac{\sin u}{u} du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du - \int_{-\infty}^{-A\lambda} \frac{\sin u}{u} du \\ &\quad - \int_{A\lambda}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi - 2 \int_{A\lambda}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du. \end{aligned}$$

由分部积分得

$$\begin{aligned} \int_{A\lambda}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_{A\lambda}^N \frac{\sin u}{u} du = \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\cos u}{u} \right) \Big|_{A\lambda}^N \\ &\quad - \int_{A\lambda}^N \frac{\cos u}{u^2} du = \frac{\cos(A\lambda)}{A\lambda} + O\left(\int_{A\lambda}^{\infty} u^{-2} du\right) \\ &= O((A\lambda)^{-1}). \end{aligned}$$

因此这时(ii)成立。类似地,当 $\lambda \leq -1$ 时,可证(ii)成立。

(iii) 当 $0 < \lambda < 1$ 时,

$$F(A, \lambda) = \int_{-A\lambda}^{A\lambda} \frac{\sin u}{u} du = 2 \int_0^{A\lambda} \frac{\sin u}{u} du.$$

若 $A\lambda \leq \pi$, 则

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^{A\lambda} \frac{\sin u}{u} du = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{\varepsilon}^{A\lambda} \frac{\sin u}{u} du \right) \\ &\leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left(\int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{\sin u}{u} du \right) = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u} du = O(1). \end{aligned}$$

若 $A\lambda > \pi$, 则对任一大于1的正数 N , 有

$$\begin{aligned} \int_0^{A\lambda} \frac{\sin u}{u} du &= - \int_1^0 \frac{\sin u}{u} du + \int_1^{A\lambda} \frac{\sin u}{u} du \\ &= \int_0^1 \frac{\sin u}{u} du + \int_1^N \frac{\sin u}{u} du \\ &\quad - \int_{A\lambda}^N \frac{\sin u}{u} du. \end{aligned}$$

令 $N \rightarrow +\infty$, 可得

$$\begin{aligned} \int_0^{A\lambda} \frac{\sin u}{u} du &= \int_0^1 \frac{\sin u}{u} du + \int_1^\infty \frac{\sin u}{u} du - \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(\int_{A\lambda}^N \frac{\sin u}{u} du \right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\cos u}{u} \Big|_{A\lambda}^N - \int_{A\lambda}^N \frac{\cos u}{u^2} du \right) \\ &= \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{A\lambda} + \int_{A\lambda}^\infty \frac{du}{u^2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} + O(A\lambda)^{-1} = \frac{\pi}{2} + O(1). \end{aligned}$$

所以当 $\lambda > 0$ 时 (iii) 成立。类似地, 当 $\lambda < 0$ 时也可证 (iii) 成立。

证毕。

下面我们证明定理 3.2.1。对于实数 ξ , 令

$$S(\xi) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(n\xi), e(n\xi) = \exp(2\pi i n\xi).$$

设 c 为一个充分小的、正的常数。并令

$$Q_1 = \exp\left(\frac{\lambda c L}{\log L}\right), Q_2 = Q L^{-2}, L = \log x,$$

这里 λ 为任一大于 1 的常数。我们的方法的出发点是下述恒等式:

$$\sum_{n \leq x} (\Lambda(n))^2 = \int_\tau^{1+\tau} |S(\alpha)|^2 d\alpha, \quad (1)$$

其中 $\tau = Q^{-1}$ 。(1) 确为一恒等式, 因为其右边的值等于

$$\sum_{m \leq x} \sum_{n \leq x} \Lambda(m) \Lambda(n) \left(\int_\tau^{1+\tau} e((m-n)\alpha) d\alpha \right),$$

而对于整数 k , 由 $e^{i\theta} = \exp(i\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$, 可知

$$\int_\tau^{1+\tau} e(k\alpha) d\alpha = \begin{cases} 0, & \text{若 } k \neq 0, \\ 1, & \text{若 } k = 0. \end{cases}$$

我们将发现: 若用通常的圆法处理 (1) 右端的积分, 则经过适当的变化, 就会出现均值和 $S(Q, x)$; 这说明 $S(Q, x)$ 与圆法之间有着天然的联系。对于满足 $1 \leq a \leq q \leq Q$ 和 $(a, q) = 1$ 的每对整

数 a 与 q , 令

$$m(q, a) = \{\alpha \mid |\alpha - a/q| \leq (qQ)^{-1}\},$$

则 $m(q, a)$ 为一个闭区间。我们断言:

$$[\tau, 1 + \tau] \subseteq \left(\bigcup_{(a, q)} m(q, a) \right) \cup m([Q], 1 + [Q]); \quad (2)$$

这里 $\bigcup_{(a, q)}$ 表示对于满足 $1 \leq a \leq q \leq Q$ 以及 $(a, q) = 1$ 的所有整数 a 及 q 求并集。事实上, 当 $\alpha \in [\tau, 1 + \tau]$ 时, 由引理 3.2.2, 可知存在整数 a 与 q , 满足 $(a, q) = 1, 1 \leq q \leq Q$, 使得

$$|\alpha - a/q| < 1/(qQ).$$

由 $\alpha \in [\tau, 1 + \tau]$, 可得

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1 - q^{-1}}{Q} \leq \alpha - \frac{1}{qQ} < \frac{a}{q} < \alpha + \frac{1}{qQ} \\ &\leq 1 + Q^{-1} + (qQ)^{-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

所以 $a \geq 1$, 且 $a < q(1 + Q^{-1} + q^{-1}Q^{-1}) \leq q + 1 + Q^{-1}$, 即 $1 \leq a \leq q + 1$ 。若 $a = q + 1$, 则由(3)可得 $Q - q < 1$, 故 $q = [Q]$ 。由此可知(2)成立。令 $Q_1 = (\log x)^{A+1}, Q_2 = Q(\log x)^{-2}$ 。由(1)及引理 2.3.2(xi), 我们有

$$\begin{aligned} x \log x + O(x) &\leq \left(\sum_{q \leq Q_1} + \sum_{Q_1 \leq q \leq Q_2} + \sum_{Q_2 \leq q \leq Q} \right) \sum_{\substack{(a, q)=1 \\ 1 \leq a \leq q}} \int_{I(q)} |S(z \\ &\quad + \frac{a}{q})|^2 dz + \int_{I([Q])} |S(z + 1 + \frac{1}{[Q]})|^2 dz \\ &= \sum_1 + \sum_2 + \sum_3 + \Delta([Q]), \end{aligned} \quad (4)$$

这里 $I(q) = [- (qQ)^{-1}, (qQ)^{-1}]$ 。由平凡的估计及 Cauchy 不等式可得

$$|S(z + 1 + \frac{1}{[Q]})|^2 \ll x \cdot \left(\sum_{n \leq x} \Lambda^2(n) \right) \ll x^2 \log x,$$

所以

$$\Delta([Q]) = O(x^{1/2}). \quad (5)$$

为估计 \sum_2 , 先选取正整数 J , 使得 $2^j Q_1 \leq Q_2 < 2^{j+1} Q_1$. 显见

$$\begin{aligned} \sum_2 &\leq \sum_T \sum_{q \sim T} \sum_{\substack{(a, q)=1 \\ 1 \leq a \leq q}} \int_{I(T)} \left| S\left(z + \frac{a}{q}\right) \right|^2 dz \\ &\leq \sum_T \int_{I(T)} \left(\sum_{q \sim T} \sum_{\substack{(a, q)=1 \\ 1 \leq a \leq q}} \left| S\left(z + \frac{a}{q}\right) \right|^2 \right) dz \\ &\leq 2Q^{-1} \sum_T T^{-1} \left(\max_{z \in I(T)} \left(\sum_{q \sim T} \sum_{\substack{(a, q)=1 \\ 1 \leq a \leq q}} \left| S\left(z + \frac{a}{q}\right) \right|^2 \right) \right); \end{aligned}$$

这里 \sum_T 表示 T 取所有形如 $2^j Q_1$ 的数, j 为整数, $0 \leq j \leq T$,

$q \sim T$ 表示 $T \leq q \leq 2T$. 应用 § 2.1 的 (13), 在其中取

$$M = 0, N = [x], Q = 2T, a_n = \Lambda(n)e(nz),$$

则可得估计

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{q \leq 2T \\ (a, q)=1 \\ 1 \leq a \leq q}} \left| S\left(z + \frac{a}{q}\right) \right|^2 &\ll (x + T^2) \left(\sum_{n \leq x} \Lambda^2(n) \right) \\ &\ll x(x + T^2) \log x; \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned} \sum_2 &\ll Q^{-1} \sum_{1 \leq j \leq J} (xQ_1^{-1}2^{-j} + 2^j Q_1) \left(\sum_{n \leq x} \Lambda^2(n) \right) \\ &\ll (xQ^{-1}Q_1^{-1} + Q_2Q^{-1})x \log x \ll x. \end{aligned} \quad (6)$$

接着我们处理 \sum_3 . 首先注意到: 若 z 为实数, 则

$$|1 - e(z)| = \left| e\left(\frac{z}{2}\right) - e\left(-\frac{z}{2}\right) \right| = 2 \left| \sin(\pi z) \right| \leq 2\pi |z|;$$

其中对 $|\sin \theta| \leq |\theta|$ 的证明可分 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ 和 $|\theta| \geq \frac{\pi}{2}$ 证出。因此, 我们有

$$e(nz) = 1 + O(n|z|).$$

于是, 对于 $Q_2 \leq q \leq Q$, $(a, q) = 1$, 及 $|z| \leq \frac{1}{qQ}$, 我们有

$$\begin{aligned}
S(z + a/q) &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e\left(\frac{na}{q}\right) (1 + O(n|z|)) \\
&= \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) = 1}} \Lambda(n) e\left(\frac{na}{q}\right) + \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) > 1}} \Lambda(n) e\left(\frac{na}{q}\right) \\
&\quad + O(x|z| \left(\sum_{n \leq x} \Lambda(n) \right)) \\
&= \sum_{\substack{1 \leq r \leq q \\ (r, q) = 1}} e\left(\frac{ar}{q}\right) \left(\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv r \pmod{q}}} \Lambda(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) = 1}} \Lambda(n) \right) \\
&\quad + O(x^{1/3}); \tag{7}
\end{aligned}$$

在推导中我们已用到(见定理 1.2.3(iii))

$$\sum_{\substack{1 \leq r \leq q \\ (r, q) = 1}} e\left(\frac{ar}{q}\right) = \sum_{\substack{1 \leq m \leq q \\ (m, q) = 1}} e\left(\frac{m}{q}\right) = \mu(q),$$

以及(用到引理 2.4.2(iii))

$$\begin{aligned}
\frac{\mu(q)}{\varphi(q)} \left(\sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) = 1}} \Lambda(n) \right) &\ll \frac{x}{\varphi(q)} \ll \frac{x}{Q_2} \log Q \ll x^{1/3}, \\
\frac{x^2}{qQ} &\ll \frac{x^2}{Q_2 Q} \ll x^{1/3},
\end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) > 1}} \Lambda(n) \leq \sum_{p|q} \sum_{\substack{m \geq 1 \\ p^m \leq x}} \log p \ll (\log x)^2.$$

注意到下列不等式(简记 $L = \log x$):

$$\begin{aligned}
(|u| + |v|)^2 &= |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2 \\
&\leq |u|^2 + |u|^2 L^{-1} + |v|^2 L + |v|^2 \\
&\leq |u|^2(1 + L^{-1}) + 2|v|^2 L,
\end{aligned}$$

则由(7)可知

$$\begin{aligned}
\Sigma_3 &\leq \frac{2}{Q} \sum_{Q_2 \leq q \leq Q} \frac{1}{q} \sum_{\substack{(a, q) = 1 \\ 1 \leq a \leq q}} \left| \sum_{\substack{1 \leq r \leq q \\ (r, q) = 1}} e\left(\frac{ar}{q}\right) \left(\sum_{\substack{n \equiv r \pmod{q} \\ n \leq x}} \Lambda(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) = 1}} \Lambda(n) \right) \right|^2 (1 + L^{-1}) + O(x^{3/4}). \tag{8}
\end{aligned}$$

将模 q 的主特征记为 χ_0 , 并简记 $\beta_n = \Lambda(n)$, 则当 $(r, q) = 1$ 时, 应用定理 1.2.2 的(ii) 与(iii), 以及定理 1.2.3 的(i) 与(ii), 可得

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\substack{n \equiv r \pmod{q} \\ n \leq x}} \beta_n - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{(n, q) = 1 \\ n \leq x}} \beta_n = \\
 &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) = 1}} \beta_n \left(\sum_{\chi \pmod{q}} \bar{\chi}(r) \chi(n) \right) - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{n \leq x} \beta_n \chi_0(n) \\
 &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\chi \neq \chi_0 \\ \chi \pmod{q}}} \bar{\chi}(r) \sum_{n \leq x} \beta_n \chi(n), \\
 & \sum_{\substack{1 \leq r \leq q \\ (r, q) = 1}} e\left(\frac{ar}{q}\right) \left(\sum_{\substack{n \equiv r \pmod{q} \\ n \leq x}} \beta_n - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{(n, q) = 1 \\ n \leq x}} \beta_n \right) \\
 &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\chi \neq \chi_0 \\ \chi \pmod{q}}} \chi(a) \tau(\bar{\chi}) \left(\sum_{n \leq x} \beta_n \chi(n) \right), \\
 & \sum_{\substack{1 \leq r \leq q \\ \chi \neq \chi_0 \\ \chi \pmod{q}}} \left| \sum_{\chi \neq \chi_0} \tau(\bar{\chi}) \chi(a) \left(\sum_{n \leq x} \beta_n \chi(n) \right) \right|^2 \\
 &= \sum_{\chi_1, \chi_2 \neq \chi_0} \tau(\bar{\chi}_1) \overline{\tau(\bar{\chi}_2)} \left(\sum_{\substack{(a, q) = 1 \\ 1 \leq a \leq q}} (\chi_1 \bar{\chi}_2)(a) \right) \left(\sum_{m, n \leq x} \beta_m \beta_n \chi_1(m) \bar{\chi}_2(n) \right) \\
 &= \varphi(q) \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \tau(\bar{\chi}) \right|^2 \left| \sum_{n \leq x} \beta_n \chi(n) \right|^2 \\
 &\leq \varphi(q) q \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{n \leq x} \beta_n \chi(n) \right|^2,
 \end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
 & \sum_{Q_2 \leq q \leq Q} \frac{1}{q} \sum_{\substack{(a, q) = 1 \\ 1 \leq a \leq q}} \left| \sum_{\substack{(r, q) = 1 \\ 1 \leq r \leq q}} e\left(\frac{ar}{q}\right) \left(\sum_{\substack{n \equiv r \pmod{q} \\ n \leq x}} \beta_n - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{(n, q) = 1 \\ n \leq x}} \beta_n \right) \right|^2 \\
 &\leq \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \left| \sum_{n \leq x} \beta_n \chi(n) \right|^2. \quad (9)
 \end{aligned}$$

另一方面, 应用定理 1.2.2 的(ii) 与(iii) 作类似的推导, 我们有

$$\begin{aligned}
 S(Q, x) &= \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} \left| \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \neq \chi_0} \bar{\chi}(a) \left(\sum_{n \leq x} \beta_n \chi(n) \right) \right|^2 \\
 &= \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\chi \neq \chi_0 \\ \chi \bmod q}} \left| \sum_{n \leq x} \beta_n \chi(n) \right|^2. \quad (10)
 \end{aligned}$$

由(8)、(9)、(10)可得

$$\sum_3 \leq \frac{2}{Q} S(Q, x) (1 + (\log x)^{-1}) + O(x^{3/4}). \quad (11)$$

由(4)、(5)、(6)和(11),我们得

$$x \log x \leq \frac{2}{Q} \cdot S(Q, x) (1 + L^{-1}) + \sum_1 + O(x). \quad (12)$$

因此,为证明定理 3.2.1,我们只剩下估计 \sum_1 了。令

$$d = \frac{c'}{22\lambda c}, T = \exp\left(\frac{10\lambda cL}{\log L}\right),$$

这里 c' 为定理 1.5.2 中的正绝对常数 c_2 。设 χ 为模 q 的任一特征, $q \leq Q_1$ 。若函数 $L(s, \chi)$ 有一个满足

$$\rho = \beta + i\gamma, \beta \geq 1 - \frac{d \log L}{L}, |\gamma| \leq T \quad (13)$$

的零点 ρ , 设 χ 是由模 q_1 的原特征 χ_1 诱导的, 即 $\chi = \chi_1 \chi_q^0$, 则由

$$L(s, \chi) = L(s, \chi_1) \prod_{p|q} \left(1 - \frac{\chi_1(p)}{p^s}\right),$$

以及 x 充分大, 可知 $L(\rho, \chi_1) = 0$ 。这时, 由于

$$\beta \geq 1 - \frac{d \log L}{L} \geq 1 - \frac{c'}{\log(Q_1(|t| + 2))},$$

$\rho = \beta + i\gamma$ 必是所谓的 Q_1 -例外零点 $\tilde{\beta}$ (见定理 1.5.2), 并且 $(q_1, \chi_1, \rho) = (\tilde{q}, \tilde{\chi}, \tilde{\beta})$, $\tilde{q} | q$, 这里 $(\tilde{q}, \tilde{\chi}, \tilde{\beta})$ 为此时必存在的 Q_1 -例外组。因此, $L(s, \chi)$ 或者没有满足(13)的零点, 若有, 则 Q_1 -例外组 $(\tilde{q}, \tilde{\chi}, \tilde{\beta})$ 存在, 且 $\tilde{q} | q$ 。对于 $q \leq Q_1$ 以及模 q 的任一特征 χ ,

令

$$S(\chi, z) = \sum_{n \leq x} \chi(n) \Lambda(n) e(nz), \tau(\chi) = \sum_{h \leq q} \chi(h) e\left(\frac{h}{q}\right),$$

这里 $\tau(\chi)$ 为 Gauss 和。又令

$$F(\chi_q^0, z) = S(\chi_q^0, z) - R(z), R(z) = \sum_{n \leq x} e(nz)。$$

若 Q_1 - 例外组不存在, 或 Q_1 - 例外组虽存在, 但 $\tilde{q} \nmid q$, 令 $\theta(q) = 0$, 以及

$$F(x, z) = S(x, z), x \neq \chi_q^0$$

令 $\theta(q) = 1$, 以及

$$F(\tilde{\chi}\chi_q^0, z) = S(\tilde{\chi}\chi_q^0, z) + \tilde{R}(z), \tilde{R}(z) = \sum_{n \leq x} n^{\beta-1} e(nz),$$

$$F(\chi, z) = S(\chi, z), \chi \neq \chi_q^0, \chi \neq \tilde{\chi}\chi_q^0。$$

当 $\alpha = \frac{a}{q} + z, 1 \leq a \leq q, (a, q) = 1$ 且 $|z| \leq (qQ)^{-1}$ 时, 应用定理 1.2.2 的(ii) 及定理 1.2.3 的(i) 与(iii), 可得

$$\begin{aligned} S(\alpha) &= \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(n\alpha) = \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) = 1}} \Lambda(n) e\left(n\left(\frac{a}{q} + z\right)\right) \\ &\quad + O\left(\sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) > 1}} (\Lambda(n))\right) \\ &= \sum_{\substack{r=1 \\ (r, q)=1}}^q e\left(\frac{ra}{q}\right) \left(\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv r \pmod{q}}} \Lambda(n) e(nz)\right) + O(L^2) \\ &= \sum_{\substack{r=1 \\ (r, q)=1}}^q e\left(\frac{ra}{q}\right) \left[\frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod{q}} \bar{\chi}(r) S(\chi, z)\right] + O(L^2) \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod{q}} \left(\sum_{\substack{r=1 \\ (r, q)=1}}^q \bar{\chi}(r) e\left(\frac{ra}{q}\right)\right) S(\chi, z) + O(L^2) \\ &= \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \pmod{q}} \chi(a) \tau(\bar{\chi}) S(\chi, z) + O(L^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\mu(q)R(z)}{\varphi(q)} - \frac{\theta(q)\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)\tilde{\chi}(a)\tilde{R}(z)}{\varphi(q)} \\
&\quad + \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \chi(a)\tau(\bar{\chi})F(\chi, z) + O(L^2), \quad (14)
\end{aligned}$$

这里 $\sum_{\chi \bmod q}$ 表示 χ 取过所有模 q 的特征, 并且我们已注意到当 $Q_1 -$

例外特征 $\tilde{\chi}$ 存在时, 它是实特征. 由 (14) 及不等式 (设 $n \ll 1$)

$$(|u_1| + \cdots + |u_n|)^2 \ll |u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2,$$

容易得

$$\begin{aligned}
\sum_1 &= \sum_{q \leq Q_1} \sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q) = 1}} \int_{I(q)} |S(z + \frac{a}{q})|^2 dz \\
&\ll \sum_4 + \sum_5 + \sum_6 + x^{1/2}, \quad (15)
\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}
\sum_4 &= \left(\sum_{q \leq Q_1} \frac{1}{\varphi(q)} \right) \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |R(z)|^2 dz \right), \\
\sum_5 &= \left(\sum_{q \leq Q_1} \frac{\theta(q) |\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2}{\varphi(q)} \right) \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\tilde{R}(z)|^2 dz \right), \\
\sum_6 &= \sum_{q \leq Q_1} \sum_{\substack{(a, q) = 1 \\ 1 \leq a \leq q}} \frac{1}{\varphi^2(q)} \int_{I(q)} \left| \sum_{\chi \bmod q} \chi(a)\tau(\bar{\chi})F(\chi, z) \right|^2 dz.
\end{aligned}$$

在以下的估计中, \ll 记号所忽略的绝对常数都与 c 无关. 由引理

3.2.3 可知

$$\sum_{q \leq Q_1} \frac{1}{\varphi(q)} \ll \log Q_1 \ll \frac{cL}{\log L},$$

又

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |R(z)|^2 dz = \sum_{n \leq x} 1 = x + O(1),$$

所以

$$\sum_4 \ll \frac{cxL}{\log L}. \quad (16)$$

若 Q_1 - 例外组存在, 令 $\theta = 1$, 否则, 令 $\theta = 0$. 则当 $q \leq Q_1$ 时, $\theta(q) = 1$ 当且仅当 $\theta = 1$ 且 $\tilde{q} | q$. 当 $\theta(q) = 1$ 时, 由定理 1.2.3 的 (ii) 得

$$|\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2 \leq r,$$

这里 $\tilde{\chi}$ 与 r 分别为 Q_1 - 例外特征与 Q_1 - 例外模. 因此, 应用 $\varphi(mr) \geq \varphi(m)\varphi(r)$, 引理 2.4.2 的 (iii), $r \leq Q_1$, 以及引理 3.2.3, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq Q_1} \frac{\theta(q) |\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2}{\varphi(q)} &\leq \theta \sum_{mr \leq Q_1} \frac{r}{\varphi(mr)} \leq \theta \frac{r}{\varphi(r)} \sum_{m \leq Q_1} \frac{1}{\varphi(m)} \\ &\ll \log \log Q_1 \cdot \log Q_1 \ll cL. \end{aligned}$$

又

$$\theta \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\tilde{K}(z)|^2 dz = \theta \cdot \sum_{n \leq x} n^{2(\tilde{\beta}-1)} \ll x,$$

所以

$$\sum_5 \ll cLx. \quad (17)$$

对于 \sum_6 , 将 $|\sum_{\chi \bmod q}|^2$ 展开, 并应用定理 1.2.2 的 (iii), 得

$$\sum_6 = \sum_{q \leq Q_1} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \int_{I(q)} |\tau(\tilde{\chi}) F(\chi, z)|^2 dz. \quad (18)$$

设 q 为正整数, $q \leq Q_1$, $z \in I(q)$, q 与 z 固定. 当 $q \geq 3$ 时, 对模 q 的任一非主特征 χ , 由定理 1.2.2 的 (v), 有唯一的正整数 m , $m | q$, 及模 m 的唯一原特征 χ_1 , 使得 $\chi = \chi_1 \chi_q^0$. 对模 q 的全体非主特征 χ 按有序对 (m, χ_1) 进行分类, 可知

$$\sum_{\substack{\chi \neq \chi_q^0 \\ \chi \bmod q}} |\tau(\bar{\chi}) F(\chi, z)|^2$$

$$= \sum_{m \mid q} \sum_{\chi_1 \pmod{m}}^* |\tau(\overline{\chi_1 \chi_q^0}) F(\chi_1 \chi_q^0, z)|^2, \quad (19)$$

这里 $*$ 表示对模 m 的全体原特征求和。事实上,很明显(19)式的左边不超过右边,而右边每对 (m, χ_1) 所诱导的模 q 非主特征 $\chi_0 \chi_1$ 是互不相同的,因为若 $\chi_0 \chi_1 = \chi_0 \chi_2$, χ_i 为模 m_i 的原特征, $m_i \mid q, i = 1, 2$, 则由定理 1.2.2 的(iii)中关于唯一性的证明可知,必有 $m_1 = m_2, \chi_1 = \chi_2$ 。因此, (19) 式的右边又不超过左边。所以等式(19) 确定成立。由(15), 作平凡的估计可得

$$F(\chi_1 \chi_q^0, z) = F(\chi_1, z) + O(L^2),$$

因此,由定理 1.2.3 的(ii) 及(19),我们有(注意:模 1 或模 2 仅有主特征)

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\chi \neq \chi_q^0 \\ \chi \pmod{q}}} |\tau(\overline{\chi}) F(\chi, z)|^2 &\leq \sum_{m \mid q} m \sum_{\chi_1 \pmod{m}}^* |F(\chi_1, z) + O(L^2)|^2, \\ &\ll \sum_{m \mid q} m \sum_{\chi_1 \pmod{m}}^* (|F(\chi_1, z)|^2 + L^4) \\ &\ll \sum_{m \mid q} m \sum_{\chi_1 \pmod{m}}^* |F(\chi, z)|^2 \\ &\quad + L^4 \sum_{m \mid q} m \varphi(m), \\ &\sum_{3 \leq q \leq Q_1} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\chi \neq \chi_q^0 \\ \chi \pmod{q}}} \int_{I(q)} |\tau(\overline{\chi}) F(\chi, z)|^2 dz \\ &\ll \sum_{3 \leq q \leq Q_1} \frac{1}{\varphi(q_1)} \sum_{m \mid q} m \sum_{\chi_1 \pmod{m}}^* \left(\int_{I(m)} |F(\chi_1, z)|^2 dz \right) \\ &\quad + \frac{L^4}{Q} \sum_{q \leq Q_1} \frac{1}{q \varphi(q)} \left(\sum_{m \mid q} m \varphi(m) \right) \\ &\ll \sum_{3 \leq m \leq Q_1} m \left(\sum_{\chi_1 \pmod{m}}^* \left(\int_{I(m)} |F(\chi_1, z)|^2 dz \right) \right) \left(\sum_{ms \leq Q_1} \frac{1}{\varphi(ms)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{L^4}{Q} \sum_{m \leq Q_1} m \varphi(m) \left(\sum_{\substack{m|q \\ q \leq Q_1}} \frac{1}{q \varphi(q)} \right) \\
& \ll \sum_{3 \leq m \leq Q_1} \frac{m}{\varphi(m)} \cdot \sum_{\chi_1 \pmod{m}}^* \left(\int_{I(m)} |F(\chi_1, z)|^2 dz \right) \left(\sum_{s \leq Q_1} \frac{1}{\varphi(s)} \right) \\
& + Q_1 \frac{L^4}{Q};
\end{aligned}$$

其中已用到 $\varphi(ms) \geq \varphi(m)\varphi(s)$ 。由引理 2.4.2 的(iii) 和引理 3.2.3 可得

$$\begin{aligned}
& \text{当 } m \leq Q_1 \text{ 时, } \frac{m}{\varphi(m)} \ll \log \log Q_1 \ll \log L, \\
& \sum_{s \leq Q_1} \frac{1}{\varphi(s)} \ll \log Q_1 \ll \frac{cL}{\log L},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
& \sum_{3 \leq q \leq Q_1} \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{\chi \neq \chi_0 \\ \chi \pmod{q}}} \int_{I(q)} |\tau(\overline{\chi}) F(\chi, z)|^2 dz \\
& = O(cL \sum_{3 \leq m \leq Q_1} \sum_{\chi_1 \pmod{m}}^* \left(\int_{I(m)} |F(\chi_1, z)|^2 dz \right)) \\
& \quad + O(L^4 Q^{-1}) \\
& = O(cL \sum_7) + O(Q_1 L^4 Q^{-1}), \tag{20}
\end{aligned}$$

这里

$$\sum_7 = \sum_{3 \leq m \leq Q_1} \sum_{\chi_1 \pmod{m}}^* \left(\int_{I(m)} |F(\chi, z)|^2 dz \right). \tag{21}$$

由(15) ~ (18), $\tau(\chi_q^0) = \mu(q)$ (见定理 1.2.3 的(iii)), 以及(20), 可得

$$\begin{aligned}
\sum_6 & = O\left(\sum_{q \leq Q_1} \frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)}\right) \left(\int_{I(q)} |F(\chi_q^0, z)|^2 dz\right) \\
& \quad + cL \sum_7 + Q_1 L^4 Q^{-1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_1 = O(cxL) + O\left(\sum_{q \leq Q_1} \frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)} \int_{I(q)} |F(\chi_q^0, z)|^2 dz\right) \\ + O(cL \sum_7),\end{aligned}\quad (22)$$

其中 \sum_7 由 (21) 给出。设 $3 \leq m \leq Q_1$ 。对于模 m 的每个原特征 χ ，由定义可知

$$F(\chi, z) = \sum_n C(n, \chi) e(nz),$$

这里

$$C(n, \chi) = \begin{cases} 0, & n > x \text{ 或 } n < 1, \\ \chi(n) \Lambda(n) + E_{1, \chi} n^{\tilde{\beta}-1}, & 1 \leq n \leq x, \end{cases}$$

其中当 (χ, m) 为 Q_1 -例外对 $(\tilde{\chi}, \tilde{q})$ 时, $E_{1, \chi} = 1$, 这时 $\tilde{\beta}$ 为 Q_1 -例外零点, 否则 $E_{1, \chi} = 0$ 。令 $\sigma = mQ/2$,

$$C(t) = \sigma^{-1} \sum_{|n-t| \leq \sigma/2} \overline{C(n, \chi)}.$$

设 $\sigma_1 = 1 - \sigma/2$, $\sigma_2 = x + \sigma/2$ 。注意, 当 $t \notin [\sigma_1, \sigma_2]$ 时, $C(t) = 0$ 。对充分大的正数 M , $M > 2\sigma_2$, 函数 $C(t)$ 在区间 $[-M, M]$ 上是有界变差的。为证这个论断, 任取 $[-M, M]$ 的一组分点 $\{x_i\}$,

$$-M = x_0 < x_1 < \cdots < x_{N+1} = M,$$

若设位于区间 $[\sigma_1, \sigma_2]$ 内的分点为 $y_0, y_1, \cdots, y_{K+1}$, $\sigma_1 \leq y_0 < \cdots < y_{K+1} \leq \sigma_2$, 则(注意: 若 $y \notin [\sigma_1, \sigma_2]$, 则 $C(y) = 0$)

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^N |C(x_{i+1}) - C(x_i)| &\leq |C(y_0) - C(\sigma_1)| + |C(\sigma_1)| \\ &\quad + \sum_{i=0}^K |C(y_{i+1}) - C(y_i)| \\ &\quad + |C(\sigma_2) - C(y_{K+1})| + |C(\sigma_2)|.\end{aligned}\quad (23)$$

显然, 对任意的 t , 都有

$$|C(t)| \leq \sigma^{-1} \sum_{n \leq x} |C(n, \chi)|. \quad (24)$$

我们断言:对每个 $i, 0 \leq i \leq K$, 成立着

$$\begin{aligned} |C(y_{i+1}) - C(y_i)| &\leq \sigma^{-1} \left(\sum_{y_i - \frac{\sigma}{2} \leq n < y_{i+1} - \frac{\sigma}{2}} |C(n, \chi)| \right) \\ &\quad + \sigma^{-1} \left(\sum_{y_i + \frac{\sigma}{2} < n \leq y_{i+1} + \frac{\sigma}{2}} |C(n, \chi)| \right). \end{aligned} \quad (25)$$

若 $y_{i+1} - \frac{\sigma}{2} > y_i + \frac{\sigma}{2}$, 则

$$\begin{aligned} |C(y_{i+1}) - C(y_i)| &\leq |C(y_{i+1})| + |C(y_i)| \\ &\leq \sigma^{-1} \sum_{y_{i+1} - \frac{\sigma}{2} \leq n \leq y_{i+1} + \frac{\sigma}{2}} |C(n, \chi)| + \sigma^{-1} \sum_{y_i - \frac{\sigma}{2} \leq n \leq y_i + \frac{\sigma}{2}} |C(n, \chi)| \\ &\leq \sigma^{-1} \sum_{y_i + \frac{\sigma}{2} < n \leq y_{i+1} + \frac{\sigma}{2}} |C(n, \chi)| + \sigma^{-1} \sum_{y_i - \frac{\sigma}{2} \leq n < y_{i+1} - \frac{\sigma}{2}} |C(n, \chi)|, \end{aligned}$$

因此(25) 成立。若 $y_{i+1} - \frac{\sigma}{2} \leq y_i + \frac{\sigma}{2}$, 则

$$\begin{aligned} |C(y_{i+1}) - C(y_i)| &= \left| \sigma^{-1} \sum_{y_i - \frac{\sigma}{2} \leq n < y_{i+1} - \frac{\sigma}{2}} C(n, \chi) \right. \\ &\quad \left. - \sigma^{-1} \sum_{y_i + \frac{\sigma}{2} < n \leq y_{i+1} + \frac{\sigma}{2}} C(n, \chi) \right| \\ &\leq \sigma^{-1} \sum_{y_i - \frac{\sigma}{2} \leq n < y_{i+1} - \frac{\sigma}{2}} |C(n, \chi)| \\ &\quad + \sigma^{-1} \sum_{y_i + \frac{\sigma}{2} < n \leq y_{i+1} + \frac{\sigma}{2}} |C(n, \chi)|, \end{aligned}$$

因此(25) 仍成立。我们有

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq i \leq K} \sigma^{-1} \sum_{y_i - \frac{\sigma}{2} \leq n < y_{i+1} - \frac{\sigma}{2}} |C(n, \chi)| &= \sigma^{-1} \left(\sum_{y_0 - \frac{\sigma}{2} \leq n < y_{K+1} - \frac{\sigma}{2}} |C(n, \chi)| \right) \\ &\leq \sigma^{-1} \sum_{n \leq x} |C(n, \chi)|, \end{aligned}$$

并且类似地可得

$$\sum_{0 \leq i \leq K} \sigma^{-1} \left(\sum_{y_i + \frac{\sigma}{2} < n \leq y_{i+1} + \frac{\sigma}{2}} |C(n, \chi)| \right) \leq \sigma^{-1} \sum_{n \leq x} |C(n, \chi)|.$$

因此,由(23)、(24)及(25)可得

$$\sum_{i=0}^N |C(x_{i+1}) - C(x_i)| = O(\sigma^{-1} \sum_{n \leq x} |C(n, \chi)|),$$

且其中 O 记号蕴含的常数与 N 无关。这就证明了 $C(t)$ 在区间 $[-M, M]$ 上是有界变差的函数。若设 $C(t) = u(t) + iv(t)$, $u(t)$ 和 $v(t)$ 是实函数,则 $u(t)$ 和 $v(t)$ 也是区间 $[-M, M]$ 上有界变差的。由引理 3.2.4 可知, $u(t)$ 和 $v(t)$ 都在 $[-M, M]$ 上可积,所以按定义 $C(t)$ 也在 $[-M, M]$ 上可积。由此及定义不难验证: $C(t)$ 还在 $[-M, M]$ 的任何子区间上可积且绝对可积,特别地 $C(t)$ 在 $[\sigma_1, \sigma_2]$ 上可积。对每个正整数 $n, 1 \leq n \leq x$, 定义区间 $[\sigma_1, \sigma_2]$ 上的函数 $\Delta(y, n)$ 为

$$\Delta(y, n) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \max(\sigma_1, n - \frac{\sigma}{2}) \leq y \leq \min(\sigma_2, n + \frac{\sigma}{2}), \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

则容易知道 $\Delta(y, n)$ 也为 $[\sigma_1, \sigma_2]$ 上的有界变差函数,因而它是 $[\sigma_1, \sigma_2]$ 上可积的函数。由于我们有(注意,由此也可给出 $C(y)$ 在 $[\sigma_1, \sigma_2]$ 上可积的另一证明)

$$C(y) = \sigma^{-1} \sum_{|n-y| \leq \frac{1}{2}\sigma} C(n, \chi) = \sigma^{-1} \sum_{1 \leq n \leq x} C(n, \chi) \Delta(y, n),$$

所以,当 $M > 2\sigma_2$ 时,对任意实数 $t, t \neq 0$,我们有

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M C(y) e(-yt) dy &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} C(y) e(-yt) dy \\ &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \sigma^{-1} \left(\sum_{1 \leq n \leq x} C(n, \chi) \right) \\ &\quad \Delta(y, n) e(-yt) dy = \sigma^{-1} \sum_{n \leq x} C(n, \chi) \left(\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \Delta(y, n) e(-yt) dy \right) \\ &= \sigma^{-1} \sum_{n \leq x} C(n, \chi) \left(\int_{n-\frac{\sigma}{2}}^{n+\frac{\sigma}{2}} e(-yt) dy \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sigma^{-1} \sum_{n \leq x} C(n, \chi) e(-nt) \left(\int_{-\frac{\sigma}{2}}^{\frac{\sigma}{2}} e(-zt) dz \right) \\
&= \left(\sum_{n \leq x} C(n, \chi) e(-nt) \right) \frac{\sin(\pi \sigma t)}{\pi \sigma t} \\
&= \frac{\sin(\pi \sigma t)}{\pi \sigma t} \overline{F(\chi, t)}. \quad (26)
\end{aligned}$$

又,显然有

$$\begin{aligned}
\int_{-M}^M |C(y)| dy &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C(y)| dy \\
&\leq \sigma^{-1} (\sigma_2 - \sigma_1) \sum_{n \leq x} |C(n, \chi)|. \quad (27)
\end{aligned}$$

若补充定义 $\left. \frac{\sin(\pi \sigma t)}{\pi \sigma t} \right|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi \sigma t)}{\pi \sigma t} = 1$, 则由推导过程可知 (26) 式仍成立。由 (27) 可知 $C(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上绝对可积。因此, 由定义及 (26) 可得函数 $C(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上的 Fourier 变换 (定义见 § 2.2) 为

$$\begin{aligned}
\hat{C}(t) &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^M C(y) e(-yt) dy \\
&= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} C(y) e(-yt) dy \\
&= \frac{\sin(\pi \sigma t)}{\pi \sigma t} \overline{F(\chi, t)}. \quad (28)
\end{aligned}$$

因为函数 $|F(\chi, t)|$ 对 t 一致地有界, 且当 $0 < |t| \leq \frac{1}{2\sigma}$ 时,

$$\frac{2}{\pi} \leq \left| \frac{\sin(\pi \sigma t)}{\pi \sigma t} \right| \leq 1, \quad (29)$$

所以不难知道 $\hat{C}(t)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上平方可积。设 $A \geq 3$, 则

$$\begin{aligned}
\int_{-A}^A |\hat{C}(t)|^2 dt &= \int_{-A}^A \overline{\hat{C}(t)} \cdot \hat{C}(t) dt \\
&= \int_{-A}^A \overline{\hat{C}(t)} \left(\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} C(y) e(-yt) dy \right) dt \\
&= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} C(y) \left(\int_{-A}^A \overline{\hat{C}(t)} e(-yt) dt \right) dy. \quad (30)
\end{aligned}$$

当 y 固定时, 由(28) 我们有

$$\begin{aligned}
 & \int_{-A}^A \overline{\hat{C}(t)} \cdot e(-yt) dt = \int_{-A}^A \frac{\sin(\pi\sigma t)}{\pi\sigma t} \cdot F(\chi, t) e(-yt) dt \\
 &= \sum_{n \leq x} C(n, \chi) \left(\int_{-A}^A \frac{\sin(\pi\sigma t)}{\pi\sigma t} e((n-y)t) dt \right) \\
 &= \sum_{n \leq x} C(n, \chi) \left(\int_{-A}^A \frac{\sin(\pi\sigma t) \cdot \cos(2\pi t(n-y))}{\pi\sigma t} dt \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi\sigma} \sum_{n \leq x} C(n, \chi) \left(\int_{-A}^A \frac{\sin[\pi t(\sigma + 2(n-y))] }{t} dt \right. \\
 &\quad \left. + \int_{-A}^A \frac{\sin[\pi t(\sigma - 2(n-y))] }{t} dt \right). \tag{31}
 \end{aligned}$$

令 $f_1(n) = \pi(\sigma + 2(n-y))$, $f_2(n) = \pi(\sigma - 2n - y)$ 。我们将满足 $n \leq x$ 的正整数 n 分成三个集合 A_1, A_2 和 A_3 (A_i 都与 y 有关)

$$A_1 = \{n \leq x \mid \mathbb{I}f_1(n) = 0 \text{ 或 } f_2(n) = 0\},$$

$$A_2 = \{n \leq x \mid |f_1(n)| \geq 1 \text{ 且 } |f_2(n)| \geq 1\},$$

$$A_3 = \{n \leq x \mid \mathbb{I}0 < |f_1(n)| < 1 \text{ 或 } 0 < |f_2(n)| < 1\}.$$

采用引理 3.2.5 中的记号。由引理 3.2.5, 当 $n \in A_1$ 时, n 至多只有 2 个取值, 且对每个 n ,

$$F(A, f_1(n)) + F(A, f_2(n)) = F(A, 2\pi\sigma) = O(1).$$

我们有 $A_2 = A_{21} \cup A_{22} \cup A_{23}$, 这里 (A_{ij} 都与 y 有关)

$$A_{21} = \{n \leq x \mid 2(n-y) < -\sigma - 1\},$$

$$A_{22} = \{n \leq x \mid 2(n-y) > \sigma + 1\},$$

$$A_{23} = \{n \leq x \mid 1 - \sigma \leq 2(n-y) \leq \sigma - 1\}.$$

应用引理 3.2.5, 当 $n \in A_{21} \cup A_{22}$ 时,

$$F(A, f_1(n)) + F(A, f_2(n)) = O\left(\frac{1}{A}\right),$$

当 $n \in A_{23}$ 时,

$$F(A, f_1(n)) + F(A, f_2(n)) = 2\pi + O\left(\frac{1}{A}\right).$$

当 $n \in A_3$ 时, n 至多有 2 个取值, 且由引理 3.2.5 可知对每个这样的 n , 有

$$F(A, f_1(n)) + F(A, f_2(n)) = O(1),$$

且这里的 O -常数与 A 及 λ 无关。综合这些讨论, 由估计

$$C(n, \chi) \ll \Lambda(n) + 1 \ll L,$$

以及(31), 可得

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A \overline{\hat{C}(t)} e(-yt) dt &= \sigma^{-1} \sum_{n \in A_{23}} C(n, \chi) \\ &\quad + O(\sigma^{-1} x L A^{-1}) + O(\sigma^{-1} L). \end{aligned} \quad (32)$$

对每个正整数 $n, n \leq x$, 令

$$\Delta_1(y, n) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \max(n - \frac{1}{2}(\sigma - 1), \sigma_1) \\ & \leq y \leq \min(n + \frac{1}{2}(\sigma - 1), \sigma_2), \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

容易看出 $\Delta_1(y, n)$ 为区间 $[\sigma_1, \sigma_2]$ 上的有界变差函数, 因而由引理 3.2.4 得知它是 $[\sigma_1, \sigma_2]$ 上的 Riemann 可积的函数。于是, 我们得知 y 的函数

$$\sigma^{-1} \sum_{n \in A_{23}} C(n, \chi) = \sigma^{-1} \sum_{n \leq x} \Delta_1(y, n) C(n, \chi)$$

也是 $[\sigma_1, \sigma_2]$ 上 Riemann 可积的。注意, 由于 $|\overline{\hat{C}(t)}|$ 是可积的, 所以容易知道(32) 左边为 y 的连续函数。于是, 差

$$\int_{-A}^A \overline{\hat{C}(t)} e(-yt) dt - \sigma^{-1} \sum_{n \in A_{23}} C(n, \chi)$$

为 y 的可积函数。由(30) 及(32) 可得

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A |\overline{\hat{C}(t)}|^2 dt &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} C(y) (\sigma^{-1} \sum_{n \in A_{23}} C(n, \chi) + O(\sigma^{-1} x L A^{-1} + \sigma^{-1} L)) dy \\ &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} C(y) G(y) dy + O((\sigma^{-1} x L A^{-1} \end{aligned}$$

$$+ \sigma^{-1} L \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C(y)| dy),$$

这里

$$G(y) = \sigma^{-1} \sum_{|n-y| \leq \frac{1}{2}(\sigma-1)} C(n, \chi).$$

令 $A \rightarrow +\infty$, 我们得

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{C}(t)|^2 dt &= \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} C(y) G(y) dy \\ &+ O(\sigma^{-1} L \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C(y)| dy). \end{aligned} \quad (33)$$

我们可应用(33)去估计(22)中的 \sum_{γ} . 若 $3 \leq m \leq Q_1$, χ 为模 m 的一个原特征, 则当 $z \in I(m)$ 时, $|\pi z \sigma| \leq \frac{\pi}{2}$. 因此, 由(28)、(29)及(33), 可得

$$\begin{aligned} \int_{I(m)} |F(\chi, z)|^2 dz &\leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \int_{I(m)} \left| \frac{\sin(\pi z \sigma)}{\pi z \sigma} F(\chi, z) \right|^2 dz \\ &\ll \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(\pi z \sigma)}{\pi z \sigma} F(\chi, z) \right|^2 dz = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{C}(z)|^2 dz \\ &\ll \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C(y) G(y)| dy + \sigma^{-1} L \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C(y)| dy. \end{aligned} \quad (34)$$

当 $y \in [\sigma_1, \sigma_2]$ 时, 应用 $C(n, \chi) \ll \Lambda(n) + 1$ 以及定理 1.6.1 的 (iii), 可得

$$\begin{aligned} C(y) &= \sigma^{-1} \sum_{x_1 \leq n \leq x_2} \overline{C(n, \chi)} = \sigma^{-1} \sum_{x_3 \leq n \leq x_2} \overline{C(n, \chi)} + O(\sigma^{-1} x T^{-1}), \\ G(y) &= \sigma^{-1} \sum_{\gamma_1 \leq n \leq \gamma_2} C(n, \chi) = \sigma^{-1} \sum_{\gamma_3 \leq n \leq \gamma_2} C(n, \chi) + O(\sigma^{-1} x T^{-1}), \end{aligned}$$

这里

$$x_1 = \max(1, y - \frac{\sigma}{2}), x_2 = \min(x, y + \frac{\sigma}{2})$$

$$x_3 = \max(x T^{-1}, y - \frac{\sigma}{2}),$$

$$y_1 = \max(1, y - \frac{\sigma - 1}{2}), y_2 = \min(x, y + \frac{\sigma - 1}{2}),$$

$$y_3 = \max(xT^{-1}, y - \frac{\sigma - 1}{2}).$$

设

$$C_1(y) = \sigma^{-1} \sum_{x_3 \leq n \leq x_2} \overline{C(n, \chi)}, G_1(y) = \sigma^{-1} \sum_{y_3 \leq n \leq y_2} \overline{C(n, \chi)}.$$

则

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C(y)G(y)| dy \ll \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C_1(y)G_1(y)| dy +$$

$$\sigma^{-1} x T^{-1} \left(\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (|C_1(y)| + |G_1(y)|) dy + \sigma^{-2} x^2 T^{-2} (\sigma + x) \right)$$

$$\ll \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C_1(y)G_1(y)| dy + x^2 T^{-1} \sigma^{-2} (\sigma + x);$$

这里用到平凡估计: $|C_1(y)| \ll x\sigma^{-1}$, $|G_1(y)| \ll x\sigma^{-1}$ 。类似地有

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C(y)| dy \ll \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C_1(y)| dt + (x + \sigma) \sigma^{-1} x T^{-1}.$$

所以,由(34)得

$$\begin{aligned} \int_{I(m)} |F(\chi, z)|^2 dz &\ll \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C_1(y)G_1(y)| dy + \\ &\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C_1(y)| dy + x^2 T^{-1} \sigma^{-2} (\sigma + x). \end{aligned} \quad (35)$$

对于一个使得 $x_3 \leq x_2$ 的 $y, y \in [\sigma_1, \sigma_2]$, 由定理 1.6.1 的(i)可知

$$\begin{aligned} \sum_{x_3 \leq n \leq x_2} \chi(n) \Lambda(n) &= \theta \frac{x_3^{\tilde{\beta}} - x_2^{\tilde{\beta}}}{\tilde{\beta}} - \sum_{|t| \leq T} \frac{x_2^{\rho} - x_3^{\rho}}{\rho} \\ &\quad + O\left(\frac{x}{T} L^2\right), \end{aligned} \quad (36)$$

这里 $\theta = 1$ 当且仅当 $(m, \chi, \tilde{\beta})$ 为 Q_1 -例外组 (见定理 1.5.2), 否则 $\theta = 0$, $\sum_{|t| \leq T}$ 表示求和通过 $L(s, \chi)$ 的一切除去 $\tilde{\beta}$ 及 $1 - \tilde{\beta}$ (若 $\tilde{\beta}$ 存在) 外的非平凡零点 $\rho = \beta + it$ 。因此, 由 $C(n, \chi)$ 的定义可得

$$\begin{aligned}\sigma \overline{C_1(y)} &= \sum_{x_3 \leq n \leq x_2} C(n, \chi) = \\ &= \sum_{x_3 \leq n \leq x_2} \chi(n) \Lambda(n) + \theta \cdot \sum_{x_3 \leq n \leq x_2} n^{\tilde{\beta}-1}.\end{aligned}$$

当 $\theta = 1$ 时, 由推论 1.1.4 可知

$$\sum_{x_3 \leq n \leq x_2} n^{\tilde{\beta}-1} = \int_{x_3}^{x_2} u^{\tilde{\beta}-1} du + O(L) = \frac{1}{\tilde{\beta}} (x_2^{\tilde{\beta}} - x_3^{\tilde{\beta}}) + O(L).$$

因此由 (36) 我们有

$$\sigma \cdot \overline{C_1(y)} = - \sum_{|t| \leq T} \frac{x_2^\rho - x_3^\rho}{\rho} + O\left(\frac{x}{T} L^2\right). \quad (37)$$

显然, 由 (36) 可知 (37) 当 $\theta = 0$ 时也成立。设 s 为任一复数。对于位于一个复 z 平面上的半平面 $\{z \mid \operatorname{Re} z > \alpha > 0\}$ 上的任一复数 z , 定义

$$z^{s-1} = \exp((s-1)\log z),$$

这里 $\log z$ 取主分支。因为 $\log z$ 在 $\{z \mid \operatorname{Re} z > \alpha\}$ 中为解析函数, z^{s-1} 也为 $\{z \mid \operatorname{Re} z > \alpha\}$ 上的解析函数。设 ω_0 及 ω 为任二复数, $\operatorname{Re} \omega > \alpha, \operatorname{Re} \omega_0 > \alpha$ 。当 ω_0 固定, ω 在半平面 $\{z \mid \operatorname{Re} z > \alpha\}$ 上变动时, 考虑函数

$$g(\omega) = \omega^s - \omega_0^s - s \int_{\omega_0}^{\omega} z^{s-1} dz,$$

这里复积分是沿从 ω_0 到 ω 的直线段取的。由定义容易验证 $g(\omega)$ 为开连通集 $\{z \mid \operatorname{Re} z > \alpha\}$ 上的解析函数, 且 $g'(\omega) = 0$ 。因此 $g(\omega)$ 是常数, $g(\omega) = g(\omega_0) = 0$ 。特别地, 我们得

$$\begin{aligned} x_2^\rho - x_3^\rho &= \rho \int_{x_3}^{x_2} u^{\rho-1} du \ll |\rho| \cdot \int_{x_3}^{x_2} u^{\beta-1} du \\ &\ll |\rho| \min(x, \sigma) (xT^{-1})^{\beta-1}, \end{aligned}$$

这里 $\beta = \operatorname{Re} \rho$ 。因此由(37) 我们得到

$$|C_1(y)| \ll \sigma^{-1} \min(x, \sigma) \left(\sum_{|i| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right) + x\sigma^{-1} T^{-1} L^2.$$

类似地, 对于使得 $y_3 \leq y_2$ 的 $y, y \in [\sigma_1, \sigma_2]$, 可得

$$|G_1(y)| \ll \sigma^{-1} \min(x, \sigma) \left(\sum_{|i| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right) + x\sigma^{-1} T^{-1} L^2.$$

于是由(35) 我们可得到

$$\begin{aligned} \int_{I(m)} |F(\chi, z)|^2 dz &\ll (\sigma + x) (\min(x\sigma^{-1}, 1))^2 \left(\sum_{|i| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right)^2 \\ &\quad + (\sigma + x) \min(x\sigma^{-1}, 1) \left(\sum_{|i| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right) + L^2 T^{-1} x (1 + x\sigma^{-1})^2 \\ &\equiv P_1 + P_2 + P_3. \end{aligned}$$

分 $\sigma > x$ 与 $\sigma \leq x$ 讨论, 可知

$$P_1 \ll x \left(\sum_{|i| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right)^2, P_2 \ll x \left(\sum_{|i| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right).$$

所以我们有

$$\begin{aligned} \int_{I(m)} |F(\chi, z)|^2 dz &\ll x \left(\sum_{|i| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right)^2 \\ &\quad + x \left(\sum_{|i| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right) + L^2 T^{-1} x (1 + x\sigma^{-1})^2. \quad (38) \end{aligned}$$

因此, 由 $\sigma = \frac{1}{2} mQ$, (21) 及(38), 得

$$\begin{aligned} \sum_7 &\ll x \left(\sum_{3 \leq m \leq Q_1} \sum_{\chi \bmod m}^* \sum_{|i| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right)^2 \\ &\quad + x \left(\sum_{3 \leq m \leq Q_1} \sum_{\chi \bmod m}^* \sum_{|i| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right) \end{aligned}$$

$$+ L^2 T^{-1} x Q_1^2 (1 + x \sigma^{-1}) \quad (39)$$

由 Q_1 与 T 的选取 (见(1) 的上方, 及(12) 与(13) 之间), 及 Q 的变化范围, 可知(39) 式右端的最后一项为

$$\ll x \exp(-c \frac{L}{\log L}). \quad (40)$$

我们有

$$\begin{aligned} \sum_{3 \leq m \leq Q_1} \sum_{\chi \bmod m}^* \widetilde{\sum_{|t| \leq T}} (xT^{-1})^{\beta-1} &= \sum_{3 \leq m \leq Q_1} \sum_{\chi \bmod m}^* \widetilde{\sum_{\substack{|t| \leq T \\ \beta < \frac{11}{12}}} (xT^{-1})^{\beta-1} \\ &+ \sum_{3 \leq m \leq Q_1} \sum_{\chi \bmod m}^* \widetilde{\sum_{\substack{|t| \leq T \\ \beta \geq \frac{11}{12}}} (xT^{-1})^{\beta-1} = S_1 + S_2. \end{aligned} \quad (41)$$

应用定理 1.5.10(iii) 的(b), 平凡地得到估计

$$\begin{aligned} S_1 &= O((xT^{-1})^{-1/12} \sum_{3 \leq m \leq Q_1} \sum_{\chi \bmod m}^* TL) \\ &= O((xT^{-1})^{-1/12} Q_1^2 TL) = O(x^{-1/13}). \end{aligned} \quad (42)$$

由定理 1.5.2 可知, 存在常数 $c' > 0$, 使得对于每个计数于 S_2 中的零点 $\rho = \beta + it$, 都有

$$1 - \beta \geq \frac{c}{\log(Q_1(T+2))}.$$

简记 $\log(Q_1(T+2)) = L_1$. 设 x 充分大, 使 $1 - \lambda_1/L_1 > 11/12$. 为

估计 S_2 , 设 $M \geq 3$, M 为整数. 我们将区间 $[\frac{11}{12}, 1 - \frac{c'}{2L_1}]$ 分成 M 等份, 分点为 $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_M$, 即

$$\beta_0 = \frac{11}{12} < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_M = \beta' = 1 - \frac{c'}{2L_1},$$

$$\beta_{i+1} - \beta_i = \Delta, 0 \leq i \leq M-1,$$

其中 Δ 满足 $\Delta \cdot M = \beta' - \beta_0$. 设 $y = xT^{-1}$, 则 (采用定理 2.4.3 中的记号)

$$\begin{aligned}
yS_2 &\leq \sum_{0 \leq j \leq M-1} \sum_{3 \leq m \leq Q_1} \sum_{\chi \bmod m}^* \sum_{\substack{|t| \leq T \\ \beta_j \leq \beta < \beta_{j+1}}} y^\beta \\
&\leq \sum_{0 \leq j \leq M-1} \sum_{3 \leq m \leq Q_1} \sum_{\chi \bmod m}^* y^{\beta_{j+1}} (N(\beta_j, T, \chi) - N(\beta_{j+1}, T, \chi)) \\
&\leq \sum_{0 \leq j \leq M-1} (y^{\beta_{j+1}} - y^{\beta_j}) \left(\sum_{3 \leq m \leq Q_1} \sum_{\chi \bmod m}^* N(\beta_j, T, \chi) \right) \\
&\quad + y^{\beta_0} \left(\sum_{3 \leq m \leq Q_1} \sum_{\chi \bmod m}^* N(\beta_0, T, \chi) \right).
\end{aligned}$$

应用定理 2.4.3, 可得

$$\begin{aligned}
yS_2 &\ll \left(\sum_{0 \leq j \leq M-1} (TQ_1^2)^{k(1-\beta_j)} \cdot (y^{\beta_{j+1}} - y^{\beta_j}) \right. \\
&\quad \left. + (TQ_1^2)^{k(1-\beta_0)} y^{\beta_0} \right) (\log L)^3, \tag{43}
\end{aligned}$$

其中 $k = \frac{7}{2}$ 。令 $F(u) = e^{u \log y} = y^u$ 。由 Cauchy 中值定理, 我们有

$$\begin{aligned}
y^{\beta_{j+1}} - y^{\beta_j} &= F(\beta_{j+1}) - F(\beta_j) = (\beta_{j+1} - \beta_j) F'(\xi_j) \\
&= \log y \cdot (\beta_{j+1} - \beta_j) e^{\xi_j \log y},
\end{aligned}$$

其中 $\xi_j \in (\beta_j, \beta_{j+1})$ 。又由于 $\xi_j - \beta_j \leq \beta_{j+1} - \beta_j = \Delta$, 所以

$$\begin{aligned}
&\sum_{0 \leq j \leq M-1} (y^{\beta_{j+1}} - y^{\beta_j}) (TQ_1^2)^{k(1-\beta_j)} \\
&\ll \log y \cdot (TQ_1^2)^{k+k\Delta} \cdot \sum_{0 \leq j \leq M-1} (\beta_{j+1} - \beta_j) f(\xi_j),
\end{aligned}$$

这里 $f(v) = (y(TQ_1^2)^{-k})^v$ 。因此, 令 $M \rightarrow +\infty$, 由 Riemann 积分的定义可得

$$\begin{aligned}
\overline{\lim}_{M \rightarrow +\infty} \left(\sum_{0 \leq j \leq M-1} (y^{\beta_{j+1}} - y^{\beta_j}) (TQ_1^2)^{k(1-\beta_j)} \right) &\ll (\log y) (TQ_1^2)^k \int_{\beta_0}^{\beta'} f(v) dv \\
&\ll (TQ_1^2)^k (y(TQ_1^2)^{-k})^{\beta'} \ll y^{\beta'}. \tag{44}
\end{aligned}$$

在(43)中令 $M \rightarrow +\infty$, 由(43)及(44)可得

$$y \cdot S_2 \ll y^{\beta'} (\log L)^3. \tag{45}$$

由(41)、(42)与(45), 可知

$$\sum_{3 \leq m \leq Q_1} \sum_{\chi \bmod m}^* \sum_{|t| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \ll y^{\beta'-1} (\log L)^3 \ll (\log L)^{-2}. \quad (46)$$

由(39)、(40)及(46),我们得

$$\sum_{\gamma} = O(x(\log L)^{-2}). \quad (47)$$

对于每个固定的 $q, q \leq Q_1$, 我们可用当 χ 为模 m 的原特征时处理积分

$$\int_{I(m)} |F(\chi, z)|^2 dz$$

的方法类似地处理积分

$$\int_{I(q)} |F(\chi_0, z)|^2 dz,$$

这里 χ_0 为模 q 的主特征。为此,我们需要将 $1 \leq n \leq x$ 时 $C(n, \chi)$ 的值换成

$$\chi_0(n) \Lambda(n) - 1,$$

并将 σ 换成 $\frac{1}{2}qQ$ 。于是,与(35)类似地,我们有

$$\begin{aligned} \int_{I(q)} |F(\chi_0, z)|^2 dz &\ll \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C_2(y) G_2(y)| dy \\ &\quad + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} |C_2(y)| dy \\ &\quad + x^2 T^{-1} \sigma^{-2} (\sigma + x), \end{aligned} \quad (48)$$

这时 $\sigma_1 = 1 - \frac{\sigma}{2}, \sigma_2 = x + \frac{\sigma}{2}$, 而

$$C_2(y) = \sigma^{-1} \sum_{x_3 \leq n \leq x_2} (\chi_0(n) \Lambda(n) - 1),$$

$$G_2(y) = \sigma^{-1} \sum_{y_3 \leq n \leq y_2} (\chi_0(n) \Lambda(n) - 1),$$

$$x_2 = \min(x, y + \frac{\sigma}{2}), x_3 = \max(xT^{-1}, y - \frac{\sigma}{2}),$$

$$y_2 = \min(x, y + \frac{\sigma - 1}{2}), y_3 = \max(xT^{-1}, y - \frac{\sigma - 1}{2}).$$

对于使得 $x_3 < x_2$ 的值 y , 由定理 1.6.1 的(ii) 我们有

$$\begin{aligned} \sigma C_2(y) &= \sum_{x_3 \leq n \leq x_2} \Lambda(n) - (x_2 - x_3) + O(L^2) \\ &= - \sum_{|t| \leq T} \frac{1}{\rho} (x_2^\rho - x_3^\rho) + O\left(\frac{xL^2}{T}\right), \end{aligned}$$

这里 $\sum_{|t| \leq T}$ 表示对满足 $\rho = \beta + it$ 及 $|t| \leq T$ 的所有 $\zeta(s)$ 的非平凡零点 ρ 求和, 其中一个零点是几阶的就重复计算几次。由于

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\rho} (x_2^\rho - x_3^\rho) \right| &= \left| \int_{x_3}^{x_2} u^{\rho-1} du \right| \\ &\leq \int_{x_3}^{x_2} u^{\beta-1} du \ll \min(x, \sigma) (xT^{-1})^{\beta-1}, \end{aligned}$$

所以

$$|C_2(y)| \ll \min(x\sigma^{-1}, 1) \left(\sum_{|t| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right) + \sigma^{-1} xT^{-1} L^2.$$

类似地可得

$$|G_2(y)| \ll \min(x\sigma^{-1}, 1) \left(\sum_{|t| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right) + \sigma^{-1} xT^{-1} L^2.$$

所以, 应用

$$(x + \sigma)(\min(x\sigma^{-1}, 1))^2 \ll x, (x + \sigma)\min(x\sigma^{-1}, 1) \ll x,$$

由(48) 我们有

$$\begin{aligned} \int_{I(q)} |F(\chi_0, z)|^2 dz &\ll x \left(\sum_{|t| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right)^2 + x \cdot \sum_{|t| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \\ &\quad + (xT^{-1} + x^3 T^{-1} \sigma^{-2}) L^2; \end{aligned} \quad (49)$$

这里我们已用到估计式

$$\begin{aligned} (x + \sigma)(\sigma^{-1} xT^{-1} L^2)^2 &\ll (x + \sigma) x^2 T^{-1} \sigma^{-2}, \\ xT^{-1} + x^3 T^{-1} \sigma^{-2} &\gg \sqrt{xT^{-1} \cdot x^3 T^{-1} \sigma^{-2}} = x^2 T^{-1} \sigma^{-1}. \end{aligned}$$

于是,应用定理 2.3.2 的(viii) 以及 $\sigma = \frac{1}{2}qQ$ 可得

$$\begin{aligned} \sum_{q \leq Q_1} \frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)} \int_{I(q)} |F(\chi_0, z)|^2 &\ll xL \left(\sum_{|t| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right)^2 \\ &+ xL \left(\sum_{|t| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right) + xL^{-1}. \end{aligned} \quad (50)$$

我们仍可用(41) ~ (46) 中的方法,并相应地,应用定理 1.5.8 和定理 2.5.1,去估计求和

$$\sum_{|t| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1}$$

因此,若令 $y = xT^{-1}$, $L_2 = \log(T+2)$, $B'' = 1 - c''/(2L_2)$, c'' 为定理 1.5.8 中的常数 c_{16} ,则类似地有

$$\sum_{|t| \leq T} y^{\beta-1} \ll y^{\beta''-1} (\log L)^3 \ll (\log L)^{-2}. \quad (51)$$

由(22)、(47)、(50) 及(51),可得估计

$$\sum_1 = O(cxL).$$

由此估计及(12),设 c 适当地小,则可知定理 3.2.1 成立。证毕。

§ 3.3 BDH 均值和的一个显含 L 函数例外零点的渐近展开式

在本节中我们研究 BDH 均值和 $S(Q, x)$ 的渐近性态。令

$$c = \min\left(\frac{\sqrt{\lambda_1}}{15}, \frac{1}{2}\lambda_2, \frac{\sqrt{\lambda_3}}{13}\right), P = e^{7c(\log x)^{\frac{1}{2}}}, \quad (1)$$

这里 λ_1 为定理 1.5.2 中的常数 c_2 , λ_2 为定理 1.6.1 的(iii) 中的常数 λ_1 , 而 λ_3 则为定理 1.5.8 中的常数 c_{16} 。设当 P -例外组 $(\tilde{q}, \tilde{\chi}, \tilde{\beta})$ 存在时, $\theta = 1$, 否则 $\theta = 0$ (参见定理 1.5.2 中的定义)。我们的

结果为:

定理 3.3.1 当 $x \geq Q \geq 3$ 及 $Q \geq x \exp(-c(\log x)^{1/2})$ 时,

$$\begin{aligned} S(Q, x) = & Qx \log x + 2 \frac{\theta}{\tilde{\beta}} \sum_{m \leq x-Q} m^{\tilde{\beta}-1} (x^{\tilde{\beta}} - (m+Q)^{\tilde{\beta}}) \times \\ & [C(\tilde{q})(\log Q + \gamma) - C_1(\tilde{q})] \\ & + 2\theta C(\tilde{q}) \left[\sum_{m \leq x-1} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_{m+1}^{\min(m+Q, x)} u^{\tilde{\beta}-1} \log(u-m) du \right) \right] \\ & + O(Qx(\log x)^{1/2}(\log \log x)^5), \end{aligned}$$

此处 γ 为 Euler 常数(见引理 2.3.2 的(xii)), 而当 $\theta = 1$ 时,

$$\begin{aligned} C(\tilde{q}) &= \frac{1}{\varphi(\tilde{q})} \left(\sum_{\substack{q=1 \\ (q, \tilde{q})=1}}^{\infty} \frac{|\mu(q)|}{q\varphi(q)} \right), \\ C_1(\tilde{q}) &= C(\tilde{q}) \log \tilde{q} + \frac{1}{\varphi(\tilde{q})} \left(\sum_{\substack{q=1 \\ (q, \tilde{q})=1}}^{\infty} \frac{\mu(q) \log q}{q\varphi(q)} \right). \quad (2) \end{aligned}$$

由定理 3.3.1 易得以下的推论:

推论 3.3.2 (i) 当 $x \exp(-c(\log x)^{1/2}) \leq Q \leq x$ 时, 成立着

$$S(Q, x) \geq Qx \log x + O(Qx(\log x)^{1/2}(\log \log x)^5).$$

(ii) 设 δ 为一充分小正的常数, 则当

$$x(\log x)^{\delta-3/2} \leq Q \leq x$$

时, 成立着

$$S(Q, x) = Qx \log x + O(Qx(\log x)^{1-\delta/2})$$

推论 3.3.2 的证明: (i) 当 $\theta = 1$ 时, 由于

$$\log \tilde{q} \leq \log P \ll (\log x)^{1/2}, \log Q \ll \log x,$$

因此, 在 x 充分大时, 由定理 3.3.1 (特别注意(2)) 立即得到本推论(i) 的结论。

(ii) 由定理 1.5.2 可知在 $\theta = 1$ 时

$$1 - \tilde{\beta} \leq \lambda_1(\log 2P)^{-1} \leq \frac{1}{2 \log 2},$$

所以 $\tilde{\beta} \geq 1 - \frac{1}{2\log 2}$ 。由引理 2.4.2(iii) 可得

$$\tilde{S}_1 = \frac{2\theta}{\tilde{\beta}} \sum_{m \leq x-Q} m^{\tilde{\beta}-1} (x^{\tilde{\beta}} - (m+Q)^{\tilde{\beta}}) [C(\tilde{q})(\log Q + \gamma) - C_1(\tilde{q})]$$

$$= O(x^{\tilde{\beta}+1}(\log x) \frac{\log \tilde{q}}{\varphi(\tilde{q})}) = O(x^{\tilde{\beta}+1}(\log x)^{3/2}(\log \log x) \tilde{q}^{-1}),$$

$$\tilde{S}_2 = 2\theta \cdot C(\tilde{q}) \left[\sum_{m \leq x-1} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_{m+1}^{\min(m+Q, x)} u^{\tilde{\beta}-1} \log(u-m) du \right) \right]$$

$$= O\left(\frac{1}{\varphi(\tilde{q})} Q x^{\tilde{\beta}} \log x\right) = O(x^{\tilde{\beta}+1}(\log x)^{3/2}(\log \log x) \tilde{q}^{-1}).$$

由此, 在 $\tilde{q} \geq (\log x)^{2-\delta/3}$ 时显然可得所需结论。在 $\tilde{q} < (\log x)^{2-\delta/3}$ 时, 我们可应用由定理 1.5.13 所保证的不等式

$$1 - \tilde{\beta} \gg \tilde{q}^{-1/2} (\log 2\tilde{q})^{-4},$$

并仍得所需的对 \tilde{S}_1 与 \tilde{S}_2 的估计。证毕。

显然, 推论 3.3.2 的 (i) 所提供的下界是比定理 3.2.1 更为精确的下界(但 Q 的变化范围要小)。

为证定理 3.3.1, 我们要先证明几个引理。

引理 3.3.3 (i) 设 $\tau(n)$ 代表除数函数, 则

$$\tau(mn) \leq \tau(m)\tau(n).$$

(ii) 设 $f(n)$ 为一个正值数论函数, $x \geq 3$, 则

$$\sum_{n \leq x} \tau(n) f(n) \geq 2 \sum_{\substack{uv \leq x \\ u \leq \sqrt{x}}} f(uv).$$

(iii) 设 r 为任意的非负整数, $x \geq 3$, 则

$$\sum_{n \leq x} \frac{(\tau(n))^r}{n} \ll (\log x)^{2^r},$$

这里 \ll 记号所蕴含的常数与 r 有关。

(iv) 设 r 为任意非负整数, $x \geq 3$, 则

$$\sum_{n \leq x} (\tau(n))^r \ll x (\log x)^{2^r-1},$$

其中 \ll 记号所蕴含的常数与 r 有关。

证明: (i) 设 m 与 n 的最大公因子 (m, n) 的标准素因子分解式为

$$(m, n) = p_1^{b_1} \cdots p_t^{b_t},$$

这里 p_1, \dots, p_t 为互不相同的素数, b_i 为正整数, $1 \leq i \leq t$ 。那么 m 与 n 的标准因子分解式为

$m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_t^{\alpha_t} m', n = p_1^{\beta_1} \cdots p_t^{\beta_t} n', (m', n') = (m' n', p_1 \cdots p_t) = 1$, 其中 $\min(\alpha_i, \beta_i) = b_i, m'$ 为 1 或形如 $u_1^{x_1} \cdots u_k^{x_k}, n'$ 为 1 或形如 $v_1^{y_1} \cdots v_s^{y_s}, p_1, \dots, p_t, u_1, \dots, u_k$ 为互不相同的素数, $p_1, \dots, p_t, v_1, \dots, v_s$ 也为互不相同的素数, $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_s$ 为一些正整数。因此, 当 $m' \neq 1$ 且 $n' \neq 1$ 时

$$\begin{aligned} \tau(mn) &= \prod_{1 \leq i \leq t} (1 + \alpha_i + \beta_i) \prod_{1 \leq j \leq k} (1 + x_j) \prod_{1 \leq r \leq s} (1 + y_r) \\ &\leq \prod_{1 \leq i \leq t} ((1 + \alpha_i)(1 + \beta_i)) \prod_{1 \leq j \leq k} (1 + x_j) \prod_{1 \leq r \leq s} (1 + y_r) \\ &= \tau(m) \tau(n) \end{aligned}$$

当 $m' = 1$ 或 $n' = 1$ 时, 可类似地证明 (i) 也成立。

(ii) 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \tau(n) f(n) &= \sum_{uv \leq x} f(uv) = \sum_{n \leq \sqrt{x}} \sum_{v \leq x/u} f(uv) + \sum_{\sqrt{x} < u \leq x} \sum_{v \leq x/u} f(uv) \\ &= \sum_{u \leq \sqrt{x}} \sum_{v \leq x/u} f(uv) + \sum_{u \leq \sqrt{x}} \sum_{\sqrt{x} \leq v \leq x/u} f(uv) \\ &\leq 2 \sum_{u \leq \sqrt{x}} \sum_{v \leq x/u} f(uv). \end{aligned}$$

(iii) 可用数学归纳法证明。当 $r = 0$ 时, 由引理 2.3.2 的 (xii) 可知结论成立。设结论对 r 成立。由 (i)、(ii) 可得

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \frac{(\tau(n))^{r+1}}{n} &\leq 2 \sum_{u \leq \sqrt{x}} \sum_{v \leq x/u} \frac{(\tau(uv))^r}{uv} \leq 2 \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{(\tau(n))^r}{n} \left(\sum_{v \leq x/u} \frac{(\tau(v))^r}{v} \right) \\ &\ll \left(\sum_{u \leq x} \frac{(\tau(u))^r}{u} \right)^2 \ll ((\log x)^{2'})^2 = (\log x)^{2'+1}. \end{aligned}$$

所以结论对 $r+1$ 也成立。归纳法完成。

(iv) 仍用数学归纳法。当 $r=0$ 时, 结论显然成立。设结论对 r 成立。由 (i)、(ii) 与 (iii) 得

$$\begin{aligned}
 \sum_{n \leq x} (\tau(n))^{r+1} &\leq 2 \sum_{u \leq \sqrt{x}} \sum_{v \leq x/u} (\tau(uv))^r \leq 2 \sum_{u \leq \sqrt{x}} (\tau(u))^r \left(\sum_{v \leq x/u} (\tau(v))^r \right) \\
 &\ll \sum_{u \leq \sqrt{x}} (\tau(u))^r \frac{x}{u} (\log \frac{x}{u})^{2^r-1} \\
 &\ll x (\log x)^{2^r-1} \left(\sum_{u \leq \sqrt{x}} \frac{(\tau(u))^r}{u} \right) \\
 &\ll x (\log x)^{2^r-1} (\log x)^{2^r} \\
 &= x (\log x)^{2^{r+1}-1}.
 \end{aligned}$$

所以结论对 $r+1$ 也成立。归纳法完成。

引理 3.3.4 (i) 设 α 为任意实数, M 为正整数, 则 (其中 $e(\xi) = e^{2\pi i \xi}$)

$$\left| \sum_{m \leq M} e(m\alpha) \right| \leq \min(M, \frac{1}{2\|\alpha\|}),$$

这里 $\|\alpha\|$ 表示 α 与距之最近的整数之间的距离, 即 $\|\alpha\| = \min_{n \in \mathbb{Z}} |n - \alpha|$, \mathbb{Z} 为整数全体的集合。

(ii) 设 a 与 q 为互素正整数, $q \geq 3, M \geq 1, X > 0$, 则

$$S_1 = \sum_{m \leq M} \min(X, \frac{1}{\|ma/q\|}) \ll (\frac{M}{q} + 1)(X + q \log q).$$

(iii) 设 a 与 q 为互素正整数, $q \geq 3, M \geq 1, X > 0$, 则

$$S_2 = \sum_{m \leq M} \min(\frac{X}{m}, \frac{1}{\|ma/q\|}) \ll (\frac{X}{q} + M + q)L^2,$$

这里 $L = \log(Mq)$ 。

证明 (i) 先由平凡的估计, 可知

$$\left| \sum_{m \leq M} e(m\alpha) \right| \leq M. \quad (3)$$

这已说明所需结论在 α 为整数时成立了。当 α 不为整数时, 由等

比级数的求和可得

$$\sum_{m \leq M} e(m\alpha) = \frac{e(\alpha)(1 - e([M]\alpha))}{1 - e(\alpha)}.$$

因为

$$1 - e(\alpha) = e\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(e\left(-\frac{\alpha}{2}\right) - e\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = -2ie\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin(\pi\alpha),$$

应用在 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ 时成立的不等式 $\frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1$, 可得

$$\begin{aligned} \left| \sum_{m \leq M} e(m\alpha) \right| &\leq \frac{1}{|\sin(\pi\alpha)|} \\ &= \frac{1}{|\sin(\pi \|\alpha\|)|} \leq \frac{1}{2 \|\alpha\|}. \end{aligned} \quad (4)$$

由(3)、(4), 可知(i) 成立。

(ii) 存在非负整数 k , 使得 $kq \leq M < (k+1)q$. 则

$$\begin{aligned} S_1 &\leq \sum_{j=0}^k \sum_{jq \leq m < (j+1)q} \min\left(X, \frac{1}{\|ma/q\|}\right) \\ &= (k+1) \left(\sum_{m=0}^{q-1} \min\left(X, \frac{1}{\|ma/q\|}\right) \right). \end{aligned}$$

当 m 过模 q 的一个完全剩余系时, ma 亦然, 所以, 应用引理2.3.2 的(xii) 可得

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{q-1} \min\left(X, \frac{1}{\|ma/q\|}\right) &= \sum_{n=0}^{q-1} \min\left(X, \frac{1}{\|h/q\|}\right) \\ &\leq X + \sum_{1 \leq h \leq q-1} \frac{1}{\left\| \frac{h}{q} \right\|} \\ &\leq X + 2 \sum_{1 \leq h \leq \frac{q}{2}} q/h \ll X + q \log q. \end{aligned}$$

考虑到 $k+1 \ll \frac{M}{q} + 1$, (ii) 得证。

(iii) 若 $M \leq q/2$, 则因为数 $a, 2a, \dots, [\frac{q}{2}]a$ 模 q 互不同余, 且都不为 q 所整除, 我们有

$$S_2 \leq \sum_{m \leq \frac{q}{2}} \frac{1}{\|ma/q\|} \leq \sum_{1 \leq r \leq q-1} \frac{1}{\|r/q\|} \leq 2 \sum_{1 \leq t \leq \frac{q}{2}} \frac{q}{t} \ll q \log q.$$

设 $M > q/2$ 。将 $[\frac{q}{2}, M]$ 分入 $O(\log M)$ 个形如 $I_j = [M_j, M_{j+1}]$ 的小区间中, 这里

$$M_j = (\frac{q}{2})2^j, 0 \leq j \leq \log M/\log(q/2),$$

j 为整数。则应用(ii) 可得

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \sum_j \sum_{m \in I_j} \min(\frac{X}{M_j}, \frac{1}{\|ma/q\|}) \\ &= \sum_j \sum_{1 \leq r \leq q} \min(\frac{X}{M_j}, \frac{1}{\|r/q\|}) (\sum_{\substack{m \in I_j \\ am \equiv r \pmod{q}}} 1) \\ &\ll \sum_j (M_j/q + 1) (\frac{X}{M_j} + q \log q) \\ &\ll \frac{X}{q} \log M + M \log q + q \log q \cdot \log M. \end{aligned}$$

由此即可得(iii)。证毕。

引理 3.3.5 设 a 和 q 为互素的正整数, $x \geq 3, \alpha$ 为实数, $z = \alpha - a/q, |z| \leq 1/(q\tau), 1 \leq q \leq \tau \leq x$ 。则

$$\begin{aligned} |\sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(n\alpha)| &\ll (\log(Nq))^4 (1 + x|z|) \times \\ &\quad (x^{4/5} + xq^{-1/2} + (xq)^{1/2} + q). \end{aligned}$$

证明: 由引理 1.1.3 可得

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(n\alpha) &= \sum_{1 < n \leq x} \Lambda(n) e(n \cdot \frac{a}{q}) e(nz) \\ &= - \int_1^x (\sum_{n \leq u} \Lambda(n) e(\frac{na}{q})) \cdot 2\pi iz \cdot e(uz) du \\ &\quad + (\sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(\frac{na}{q})) \cdot e(xz). \end{aligned}$$

因此, 利用定理 1.6.1 的(iii) 做平凡的估计可得

$$\sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(n\alpha) = - \int_{x_1}^x \left(\sum_{n \leq u} \Lambda(n) e\left(\frac{na}{q}\right) \right) 2\pi iz \cdot e(uz) du \\ + \left(\sum_{n \leq x} \Lambda(n) e\left(\frac{na}{q}\right) \right) e(xz) + O(x^{9/5} |z|), \quad (5)$$

其中 $x_1 = x^{4/5}$ 。由此可见,我们需要估计形如

$$S = \sum_{n \leq N} \Lambda(n) e\left(\frac{na}{q}\right)$$

的指数和,其中 $x_1 \leq N \leq x$ 。令 $\omega = N^{2/5}$ 。由 Möbius 函数的性质 (见引理 2.3.3 的(iii)) 可得

$$\begin{aligned} S &= \sum_{\omega < n \leq N} \Lambda(n) e\left(n \frac{a}{q}\right) + O(\omega) \\ &= \sum_{\substack{\omega < mn \leq N \\ n > \omega}} \Lambda(n) e\left(mn \frac{a}{q}\right) \left(\sum_{d|m} \mu(d) \right) + O(\omega) \\ &= \sum_{\substack{\omega < mn \leq N \\ n > \omega}} \Lambda(n) e\left(mn \frac{a}{q}\right) \left(\sum_{\substack{d|m \\ d \leq \omega}} \mu(d) \right) \\ &\quad + \sum_{\substack{\omega < mn \leq N \\ n > \omega}} \Lambda(n) e\left(mn \frac{a}{q}\right) \left(\sum_{\substack{d|m \\ d > \omega}} \mu(d) \right) + O(\omega) \\ &= I_1 + I_2 + O(\omega). \end{aligned} \quad (6)$$

对于 I_1 , 我们看到

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{d \leq \omega} \sum_{\substack{\omega < rdn \leq N \\ n > \omega}} \Lambda(n) \mu(d) e\left(\frac{drna}{q}\right) \\ &= \sum_{d \leq \omega} \mu(d) \sum_{\substack{\omega < kd \leq N \\ n > \omega}} \left(\sum_{k=nr} \Lambda(n) \right) e\left(\frac{dka}{q}\right) \\ &= \sum_{d \leq \omega} \mu(d) \left(\sum_{\omega < kd \leq N} \log k \cdot e\left(\frac{dka}{q}\right) \right) - \sum_{d \leq \omega} \mu(d) \\ &\quad \cdot \left(\sum_{\substack{\omega < kd \leq N \\ n|k \\ n \leq \omega}} \left(\sum_{n|k} \Lambda(n) \right) e\left(\frac{dka}{q}\right) \right) \end{aligned}$$

$$= I_{11} - I_{12}; \quad (7)$$

这里我们已用到了等式(见 § 2.3 中(30)式的推导)

$$\sum_{k=nr} \Lambda(n) = \sum_{n|k} \Lambda(n) = \log k.$$

对于 I_{11} , 我们有

$$\begin{aligned} I_{11} &= \sum_{d \leq \omega} \mu(d) \left(\sum_{\omega \leq kd \leq N} \left(\int_1^k \frac{1}{t} dt \right) e\left(\frac{dka}{q}\right) \right) \\ &= \sum_{d \leq \omega} \mu(d) \left(\int_1^{\frac{N}{d}} \frac{1}{t} \left(\sum_{f(t) < k \leq \frac{N}{d}} e\left(\frac{dka}{q}\right) \right) dt \right), \end{aligned}$$

这里 $f(t) = \max(\frac{\omega}{d}, t)$. 应用引理 3.3.4 的(i) 与(iii), 可得

$$\begin{aligned} I_{11} &\ll \sum_{d \leq \omega} \int_1^{\frac{N}{d}} \frac{1}{t} \min\left(\frac{N}{d}, \frac{1}{\|da/q\|}\right) dt \\ &\ll (\log N) \sum_{d \leq \omega} \min\left(\frac{N}{d}, \frac{1}{\|da/q\|}\right) \\ &\ll (\log(Nq))^3 (Nq^{-1} + \omega + q). \end{aligned} \quad (8)$$

又, 应用引理 3.3.4 的(i) 与(iii) 可得

$$\begin{aligned} I_{12} &= \sum_{d \leq \omega} \mu(d) \left(\sum_{\substack{\omega < nd \leq N \\ n \leq \omega}} \Lambda(n) e\left(\frac{dnta}{q}\right) \right) \\ &= \sum_{d \leq \omega} \mu(d) \left(\sum_{n \leq \omega} \Lambda(n) \left(\sum_{\substack{\frac{\omega}{dn} < t \leq \frac{N}{dn}}} e\left(\frac{dnta}{q}\right) \right) \right) \\ &\ll \sum_{d \leq \omega} \sum_{n \leq \omega} \Lambda(n) \min\left(\frac{N}{dn}, \frac{1}{\|dna/q\|}\right) \\ &\ll \sum_{m \leq \omega^2} \min\left(\frac{N}{m}, \frac{1}{\|ma/q\|}\right) \left(\sum_{n|m} \Lambda(n) \right) \\ &\ll (\log(Nq))^3 (Nq^{-1} + \omega^2 + q). \end{aligned} \quad (9)$$

对于 I_2 , 我们有

$$I_2 = \sum_{\omega < m < N/\omega} c(m) \sum_{\substack{\omega < n < N/\omega \\ mn \leq N}} \Lambda(n) e\left(\frac{mna}{q}\right),$$

其中 $c(m) = \sum_{\substack{d|m \\ d > \omega}} \mu(d)$ 。将 $(\omega, \frac{N}{\omega})$ 分入 $O(\log N)$ 个形如

$J_i = (2^i \omega, 2^{i+1} \omega]$ 的范围中, 这里 i 为整数, $0 \leq i \leq \frac{\log(N/\omega^2)}{\log 2}$ 。

则有

$$|I_2| \leq \sum_i \sum_{m \in J_i} |c(m)| \cdot \left| \sum_{\substack{n > \omega \\ mn \leq N}} \Lambda(n) e\left(\frac{mna}{q}\right) \right| = \sum_i S_i。$$

设 $M_i = 2^i \omega$ 。由 Cauchy 不等式可得

$$S_i^2 \leq \left(\sum_{m \in J_i} |c(m)|^2 \right) \left(\sum_{\substack{m \in J_i \\ n > \omega \\ mn \leq N}} \left| \sum \Lambda(n) e\left(\frac{mna}{q}\right) \right|^2 \right)。$$

由引理 3.3.3 的(iv) 和 $|c(m)| \leq \tau(m)$, 得

$$\sum_{m \in J_i} |c(m)|^2 \ll M_i (\log M_i)^3。$$

再令 $N_i = NM_i^{-1}$ 。应用引理 2.3.2 的(xi) 及引理 3.3.4 的(i) 与(ii), 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{m \in J_i} \left| \sum_{m < n \leq N/m} \Lambda(m) e\left(\frac{mna}{q}\right) \right|^2 \\ &= \sum_{\omega < n_1, n_2 < N_i} \Lambda(n_1) \Lambda(n_2) \left(\sum_{m \in J_i} e\left(\frac{m(n_1 - n_2)a}{q}\right) \right) \\ &\ll \sum_{\omega < n_1, n_2 \leq N_i} \Lambda(n_1) \Lambda(n_2) \min\left(M_i, \frac{1}{\left\| (n_1 - n_2) \frac{a}{q} \right\|}\right) \\ &\ll M_i \left(\sum_{n \leq N_i} (\Lambda(n))^2 \right) + \sum_{1 \leq k \leq N_i} \min\left(M_i, \frac{1}{\left\| ka/q \right\|}\right) \left(\sum_{\substack{n_1 - n_2 = k \\ \omega < n_1, n_2 \leq N_i}} 1 \right) \\ &\cdot (\log N_i)^2 \ll M_i N_i \log N_i + N_i (\log N_i)^2 \left(\frac{N_i}{q} + 1 \right) (M_i + q \log q) \\ &\ll (N + N^2 M_i^{-1} q^{-1} + N^2 M_i^{-2} + Nq M_i^{-1}) (\log(Nq))^3, \end{aligned}$$

其中 $J'_i = \{m \mid \mathbb{I} m \leq \frac{N}{n_1}, m \leq \frac{N}{n_2}\} \cap J_i$, J'_i 为一个区间。所以

$$\begin{aligned}
 S_i^2 &\ll (\log(Nq))^6 (M_i N + N^2 q^{-1} + N^2 M_i^{-1} + Nq), \\
 S_i &\ll (\log(Nq))^3 ((M_i N)^{1/2} + Nq^{-1/2} + NM_i^{-\frac{1}{2}} + (Nq)^{1/2}), \\
 |I_2| &\ll \sum_i S_i \ll (\log(Nq))^4 (N\omega^{-1/2} + Nq^{-1/2} + (Nq)^{1/2}).
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

由(6) ~ (10), 我们得

$$\begin{aligned}
 S &\ll (\log(Nq))^4 (Nq^{-1/2} + (Nq)^{1/2} + \omega^2 + N\omega^{-1/2} + q) \\
 &\ll (\log(Nq))^4 (Nq^{-1/2} + (Nq)^{1/2} + N^{4/5} + q).
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

由(5) 及(11), 我们得

$$\begin{aligned}
 &|\sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(na)| \ll (1+x|z|) \max_{x_1 \leq u \leq x} |\sum_{n \leq u} \Lambda(n) e(\frac{na}{q})| \\
 &+ x^{9/5} |z| \ll (\log(Nq))^4 (xq^{-\frac{1}{2}} + (xq)^{\frac{1}{2}} + x^{4/5} + q) \times \\
 &(1+x|z|).
 \end{aligned}$$

证毕。

引理 3.3.6 设 $\xi \geq 1, k, t, q, p$ 为整数, $k \geq 1, t \geq 1, q \geq 1, (tk, q) = 1, p \geq 1$, 且 $p | k$, 则有

$$\begin{aligned}
 \text{(i)} \quad &\sum_{\substack{u \leq \xi \\ (u, k) = p \\ u \equiv t \pmod{q}}} 1 = \frac{\xi}{kq} \varphi\left(\frac{k}{q}\right) + O\left(\tau\left(\frac{k}{p}\right)\right). \\
 \text{(ii)} \quad &\sum_{\substack{u \leq \xi \\ (u, k) = p}} \frac{1}{u} = \frac{\varphi(k/p)}{k} \left(\log \frac{\xi}{p} + \gamma\right) - \frac{1}{p} \sum_{t \mid \frac{k}{p}} \frac{\mu(t) \log t}{t} \\
 &+ O\left(\frac{1}{\xi} \tau\left(\frac{k}{p}\right)\right),
 \end{aligned}$$

这里 γ 为 Euler 常数(见引理 2.3.2 的(xii)).

(iii) 设 $0 < \alpha < 1, \xi \geq 1$, 则

$$\sum_{r \leq \xi} r^{-\alpha} \ll \xi^{1-\alpha}, \quad \sum_{r > \xi} r^{-1-\alpha} \ll \xi^{-\alpha}.$$

证明: (i) 由引理 2.3.3 的(iii) 和(i), 我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{u \leq \xi \\ (u, k) = p \\ u \equiv t \pmod{q}}} 1 &= \sum_{\substack{m \leq \xi/p \\ (m, \frac{k}{p}) = 1 \\ m \equiv t_0 \pmod{q}}} 1 = \sum_{\substack{m \leq \xi/p \\ m \equiv t_0 \pmod{q}}} \left(\sum_{t \mid (m, \frac{k}{p})} \mu(t) \right) \\
&= \sum_{t \mid \frac{k}{p}} \mu(t) \left(\sum_{\substack{n \leq \xi/(pt) \\ n \equiv t_1 \pmod{q}}} 1 \right) \\
&= \sum_{t \mid \frac{k}{p}} \mu(t) \left(\frac{\xi}{qpt} + O(1) \right) \\
&= \frac{\xi}{qk} \varphi\left(\frac{k}{p}\right) + O\left(\tau\left(\frac{k}{p}\right)\right),
\end{aligned}$$

这里 t_0 和 t_1 为适当的整数。

(ii) 引理 2.3.2 的 (xii) 当 $0 < x < 1$ 时也成立, 这是因为这时

$$-\log x = \log \frac{1}{x} \ll e^{\log \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}.$$

所以, 由引理 2.3.3 的 (iii) 与 (i) 可得

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{u \leq \xi \\ (u, k) = p}} \frac{1}{u} &= \frac{1}{p} \sum_{\substack{u \leq \xi/p \\ (u, \frac{k}{p}) = 1}} \frac{1}{u} = \frac{1}{p} \sum_{u \leq \xi/p} \frac{1}{u} \left(\sum_{t \mid (u, \frac{k}{p})} \mu(t) \right) \\
&= \frac{1}{p} \sum_{t \mid \frac{k}{p}} \frac{\mu(t)}{t} \left(\sum_{m \leq \xi/(pt)} \frac{1}{m} \right) = \frac{1}{p} \sum_{t \mid \frac{k}{p}} \frac{\mu(t)}{t} \left(\log \frac{\xi}{p} + \right. \\
&\quad \left. \gamma - \log t + O\left(\frac{pt}{\xi}\right) \right) \\
&= \frac{\varphi(k/p)}{k} \left(\log \frac{\xi}{p} + \gamma \right) - \frac{1}{p} \sum_{t \mid \frac{k}{p}} \frac{\mu(t) \log t}{t} + \\
&\quad O\left(\frac{1}{\xi} \tau\left(\frac{k}{p}\right)\right).
\end{aligned}$$

(iii) 不妨设 $\xi \geq 3$. 设 $X = [\xi]$. 则

$$\begin{aligned}
\sum_{r \leq \xi} r^{-\alpha} &\leq 1 + \sum_{n=1}^{X-1} \left(\int_n^{n+1} u^{-\alpha} du \right) \leq 1 + \int_1^{\xi} u^{-\alpha} du \ll \xi^{1-\alpha}, \\
\sum_{r > \xi} r^{-1-\alpha} &\leq \sum_{n \geq X} \int_n^{n+1} u^{-\alpha-1} du = \int_X^{\infty} u^{-\alpha-1} du \ll X^{-\alpha} \ll \xi^{-\alpha}.
\end{aligned}$$

证毕。

引理 3.3.7 设 $x \geq Y \geq 1, 1 \leq q, n \leq P, q$ 和 n 为整数, $(n, q) = 1, c_q(r)$ 和 $c_n(r)$ 为 Ramanujan 和 (见定理 1.2.3 的 (iii)), χ 为模 q 的非主特征, $\tau_Q(r)$ 对于正整数 r 定义为

$$\tau_Q(r) = \sum_{\substack{d|r \\ 1 \leq d \leq Q}} 1$$

这里 P 和 Q 分别满足 (1) 以及定理 3.3.1 中的假设条件。则有

$$(i) \sum_{r \leq Y} \tau_Q(r) c_q(r) = Y \frac{\varphi(q)}{q} [\log(\min(Y, Q)) + \gamma - \log q] +$$

$$O\left(Q \frac{q^2}{\varphi(q)}\right).$$

(ii) 当 $q \geq 3$ 时,

$$\sum_{r \leq Y} \tau_Q(r) c_n(r) \chi(r) = O(Q \varphi(qn) (\log \log(6n))^2).$$

证明: (i) 由定理 1.2.3 的 (iii), 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{r \leq Y} c_q(r) \tau_Q(r) &= \sum_{r \leq Y} \frac{\varphi(q) \mu\left(\frac{q}{(r, q)}\right)}{\varphi(q/(r, q))} \tau_Q(r) \\ &= \varphi(q) \left(\sum_{d|q} \mu(d) / \varphi(d) \left(\sum_{\substack{r \leq Y \\ (r, q) = q/d}} \tau_Q(r) \right) \right), \end{aligned}$$

并且

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{r \leq Y \\ (r, q) = q/d}} \tau_Q(r) &= \sum_{m \leq Y^{1/2}} \sum_{\substack{n \leq Y/m \\ (mn, q) = q/d}} 1 + \sum_{n \leq Y^{1/2}} \sum_{\substack{m \leq \min(Y/n, Q) \\ (mn, q) = q/d}} 1 - \sum_{m \leq Y^{1/2}} \sum_{\substack{n \leq Y^{1/2} \\ (mn, q) = q/d}} 1 \\ &= S_1 + S_2 - S_3. \end{aligned} \quad (12)$$

假设 $Y \geq q^2$ 。由引理 3.3.6 的 (i) 与 (ii) 我们得

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{\substack{u|P \\ u \mid \frac{q}{p}}} \sum_{\substack{m \leq Y^{1/2} \\ n \leq \frac{Y}{m}}} \sum_{\substack{n \leq \frac{Y}{m} \\ (mn, q) = q/d}} 1 = \sum_{\substack{u|P \\ u \mid \frac{q}{p}}} \sum_{m \leq Y^{1/2}} \left(\frac{Y_u}{mq} \varphi(d) + O(\tau(d)) \right) \\ &= Y \frac{\varphi(d)}{q} \sum_{\substack{u|P \\ u \mid \frac{q}{p}}} u \left(\sum_{\substack{(m, q) = u \\ m \leq Y^{1/2}}} \frac{1}{m} \right) + O(\tau(d) \sum_{\substack{u|P \\ u \mid \frac{q}{p}}} \left(\frac{Y^{1/2}}{q} \varphi\left(\frac{q}{u}\right) \right)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= Y \frac{\varphi(d)}{q} \sum_{u \mid \frac{q}{p}} u \left[\frac{\varphi(q/u)}{q} \left(\log \frac{Y^{1/2}}{u} + \gamma \right) - \frac{1}{u} \sum_{t \mid \frac{q}{u}} \frac{\mu(t) \log t}{t} \right. \\
&\quad \left. + O(Y^{-1/2} \tau(\frac{q}{u})) \right] + O\left(\frac{\tau(d) Y^{1/2}}{q} \sum_{u \mid \frac{q}{d}} \varphi(\frac{q}{u})\right) \\
&= Y \frac{\varphi(d)}{q^2} (\log Y^{1/2} + \gamma) \left(\sum_{u \mid \frac{q}{d}} u \varphi(\frac{q}{u}) \right) \\
&\quad - Y \frac{\varphi(d)}{q^2} \left(\sum_{u \mid \frac{q}{d}} u \varphi(\frac{q}{u}) \log u \right) \\
&\quad - Y \frac{\varphi(d)}{q} \sum_{u \mid \frac{q}{p}} \sum_{t \mid \frac{q}{u}} \frac{\mu(t) \log t}{t} \\
&\quad + O(Y^{1/2} \frac{\varphi(d)}{q} \sum_{u \mid \frac{q}{d}} u \tau(\frac{q}{u})) + O\left(\frac{\tau(d) Y^{1/2}}{q} \sum_{u \mid \frac{q}{p}} \varphi(\frac{q}{u})\right).
\end{aligned}$$

并且这里(使用引理 2.3.3 的(ii))

$$\begin{aligned}
&Y^{1/2} \frac{\varphi(d)}{q} \left(\sum_{u \mid \frac{q}{d}} u \tau(\frac{q}{u}) \right) + Y^{1/2} \frac{\tau(d)}{q} \left(\sum_{u \mid \frac{q}{d}} \varphi(\frac{q}{u}) \right) \\
&\ll Y^{1/2} \frac{\varphi(d)}{q} \cdot \frac{q}{d} \cdot \tau^2(q) + Y^{1/2} \cdot \frac{\tau(d)}{q} \cdot q \\
&\ll Y^{1/2} \tau^2(q).
\end{aligned}$$

令 $Y_1 = \min(Y, Q)$, 则由引理 3.3.6 的(i) 与(ii), 引理 2.3.3 的(ii), 以及引理 2.3.2 的(ii), 我们有

$$S_2 = \sum_{u \mid \frac{q}{d}} \sum_{\substack{m \leq Y_1 \\ (m, q) = u}} \sum_{\substack{n \leq \min(Y^{1/2}, Y/m) \\ (n, \frac{q}{u}) = \frac{q}{du}}} 1 = \sum_{u \mid \frac{q}{d}} \left(\sum_{\substack{m \leq Y^{1/2} \\ (m, q) = u}} \sum_{\substack{n \leq Y^{1/2} \\ (n, \frac{q}{u}) = \frac{q}{du}}} 1 \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{Y^{1/2} < m < Y_1} \sum_{\substack{n \leq Y/m \\ (m, q) = u \quad (n, \frac{q}{u}) = \frac{q}{du}}} 1) \\
& = \sum_{u \mid \frac{q}{d}} \left[\sum_{\substack{m \leq Y^{1/2} \\ (m, q) = u}} (Y^{1/2} \varphi(d) \frac{u}{q} + O(\tau(d))) \right. \\
& \quad \left. + \sum_{\substack{Y^{1/2} < m \leq Y_1 \\ (m, q) = u}} (\frac{Yu}{mq} \varphi(d) + O(\tau(d))) \right] \\
& = \sum_{u \mid \frac{q}{d}} \left[Y^{1/2} \frac{\varphi(d)u}{q} \left(\sum_{\substack{m \leq Y^{1/2} \\ (m, q) = u}} 1 \right) + \frac{Y\varphi(d)u}{q} \left(\sum_{\substack{Y^{1/2} < m \leq Y_1 \\ (m, q) = u}} \frac{1}{m} \right) + \right. \\
& \quad \left. O(\tau(d) \frac{Y_1}{q} \varphi(\frac{q}{u})) \right] \\
& = Y^{1/2} \frac{\varphi(d)}{q} \sum_{u \mid \frac{q}{d}} u \left(\frac{Y^{1/2}}{q} \varphi(\frac{q}{u}) + O(\tau(\frac{q}{u})) \right) \\
& \quad + \frac{Y\varphi(d)}{q} \sum_{u \mid \frac{q}{d}} u \left(\frac{\varphi(q/u)}{q} (\log(\frac{Y_1}{Y^{1/2}})) \right. \\
& \quad \left. + O(\frac{1}{Y^{1/2}} \tau(\frac{q}{u})) + O(\tau(d)) \frac{Y_1}{q} \sum_{u \mid \frac{q}{d}} \varphi(\frac{q}{u}) \right) \\
& = Y \frac{\varphi(d)}{q^2} \sum_{u \mid \frac{q}{d}} u \varphi(\frac{q}{u}) + \frac{Y\varphi(d)}{q^2} \log(\frac{Y_1}{Y^{1/2}}) \sum_{u \mid \frac{q}{d}} u \varphi(\frac{q}{u}) + \\
& \quad + O(Q\tau(d)),
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
S_3 & = \sum_{u \mid \frac{q}{d}} \sum_{\substack{(m, q) = u \\ m \leq Y^{1/2}}} \sum_{\substack{n \leq Y^{1/2} \\ (n, \frac{q}{u}) = \frac{q}{du}}} 1 = \sum_{u \mid \frac{q}{d}} \sum_{\substack{(m, q) = u \\ m \leq Y^{1/2}}} \left[Y^{1/2} \frac{\varphi(d)}{q} u + O(\tau(d)) \right] \\
& = \sum_{u \mid \frac{q}{d}} Y^{1/2} \frac{\varphi(d)}{q} u \left(\sum_{\substack{(m, q) = u \\ m \leq Y^{1/2}}} 1 \right) + O\left(\left(\sum_{u \mid \frac{q}{d}} \sum_{\substack{(m, q) = u \\ m \leq Y^{1/2}}} 1 \right) \tau(d) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{u \mid \frac{q}{d}} Y^{1/2} \frac{\varphi(d)}{q} u \left(\frac{Y^{1/2}}{q} \varphi\left(\frac{q}{u}\right) + O\left(\tau\left(\frac{q}{u}\right)\right) \right) + \\
&\quad + O\left(\tau(d) \sum_{u \mid \frac{q}{d}} \left(Y^{1/2} \varphi\left(\frac{q}{u}\right) \frac{1}{q} \right) \right) \\
&= Y \frac{\varphi(d)}{q^2} \sum_{u \mid \frac{q}{d}} u \varphi\left(\frac{q}{u}\right) + O\left(Y^{1/2} \tau^2(q)\right).
\end{aligned}$$

因此,由(12)并应用引理 2.3.3 的(iii),可得

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{r \leq Y \\ (r, q) = \frac{q}{d}}} \tau_Q(r) &= Y \frac{\varphi(d)}{q^2} (\log Y_1 + \gamma) \left(\sum_{u \mid \frac{q}{d}} u \varphi\left(\frac{q}{u}\right) \right) \\
&\quad - Y \frac{\varphi(d)}{q^2} \left(\sum_{u \mid \frac{q}{d}} u \varphi\left(\frac{q}{u}\right) \log u \right) \\
&\quad - Y \frac{\varphi(d)}{q} \left(\sum_{u \mid \frac{q}{d}} \sum_{t \mid \frac{q}{u}} \frac{\mu(t) \log t}{t} \right) + O(Q\tau(d)), \\
\sum_{r \leq Y} c_q(r) \tau_Q(r) &= \varphi(q) \sum_{d \mid q} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \left[Y \frac{\varphi(d)}{q^2} (\log Y_1 \right. \\
&\quad \left. + \gamma) \left(\sum_{u \mid \frac{q}{d}} u \varphi\left(\frac{q}{u}\right) \right) \right. \\
&\quad \left. - Y \frac{\varphi(d)}{q^2} \left(\sum_{u \mid \frac{q}{d}} u \varphi\left(\frac{q}{u}\right) \log u \right) \right. \\
&\quad \left. - Y \frac{\varphi(d)}{q} \left(\sum_{u \mid \frac{q}{d}} \sum_{t \mid \frac{q}{u}} \frac{\mu(t) \log t}{t} \right) + O(Q\tau(d)) \right] \\
&= Y \frac{\varphi(q)}{q^2} (\log Y_1 + \gamma) \left(\sum_{d \mid q} \mu(d) \sum_{u \mid \frac{q}{d}} u \varphi\left(\frac{q}{u}\right) \right) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Y \frac{\varphi(d)}{q^2} \left(\sum_{d|q} \mu(d) \sum_{u|\frac{q}{d}} u \varphi\left(\frac{q}{u}\right) \log u \right) \\
& - Y \frac{\varphi(q)}{q} \left(\sum_{d|q} \mu(d) \sum_{u|\frac{q}{d}} \sum_{t|\frac{q}{u}} \frac{\mu(t) \log t}{t} \right) \\
& + O(Q\varphi(q) \left(\sum_{d|q} \frac{|\mu(d)|}{\varphi(d)} \tau(d) \right)) \\
& = Y \frac{\varphi(q)}{q^2} (\log Y_1 + \gamma) \sum_{u|q} u \varphi\left(\frac{q}{u}\right) \left(\sum_{d|\frac{q}{u}} \mu(d) \right) \\
& - Y \frac{\varphi(q)}{q^2} \sum_{u|\frac{q}{q}} u \varphi\left(\frac{q}{u}\right) \log u \left(\sum_{d|\frac{q}{u}} \mu(d) \right) \\
& - Y \frac{\varphi(q)}{q} \left(\sum_{t|q} \frac{\mu(t) \log t}{t} \sum_{u|\frac{q}{t}} \sum_{d|\frac{q}{u}} \mu(d) \right) \\
& + O(Q\varphi(q)) \prod_{p|q} \left(1 + \frac{2}{p-1} \right) \\
& = Y \frac{\varphi(q)}{q} (\log Y_1 + \gamma) - Y \frac{\varphi(q)}{q} \log q \\
& + O\left(Q \frac{q^2}{\varphi(q)}\right); \tag{13}
\end{aligned}$$

这里在最后一步,我们用到了不等式

$$\prod_{p|q} \left(1 + \frac{2}{p-1} \right) \leq \prod_{p|q} \left(1 + \frac{1}{p-1} \right)^2 = \frac{q^2}{\varphi^2(q)}.$$

(13) 是在 $Y \geq q^2$ 时导出的,这说明引理 3.5.4 在 $Y \geq q^2$ 时成立。若 $Y \leq q^2$,则由 $q \leq P \leq Q(\log x)^{-2}$ 及引理 3.3.3 的(iv),我们有

$$Y \frac{\varphi(q)}{q} (\log Y_1 + \gamma) - Y \frac{\varphi(q)}{q} \log q \ll Q \frac{q^2}{\varphi(q)},$$

$$\sum_{r \leq Y} \tau_Q(r) c_q(r) \ll \varphi(q) \sum_{\substack{r \leq q^2 \\ r \leq Y}} \tau(r) \ll q^3 \log q \ll Q \frac{q^2}{\varphi(q)},$$

所以这时引理 3.3.7(i) 仍成立。

(ii) 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{r \leq Y} \tau_Q(r) c_n(r) \chi(r) &= \sum_{\substack{ab \leq Y \\ a \leq Q}} \chi(a) \chi(b) c_n(ab) \\ &= \sum_{a \leq Q} \chi(a) \sum_{b \leq Y_1} \chi(b) c_n(ab) \\ &= \sum_{a \leq Q} \chi(a) \sum_{\substack{k=1 \\ (k, q)=1}}^q \chi(k) \left(\sum_{\substack{b \leq Y_1 \\ b \equiv k \pmod{q}}} c_n(ab) \right), \end{aligned} \quad (14)$$

这里 $Y_1 = Y/a$ 。令 $n_1 = n/(n, a)$ 。由引理 3.3.6 的(i) 我们有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{b \leq Y_1 \\ b \equiv k \pmod{q}}} c_n(ab) &= \varphi(n) \sum_{d | n_1} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \left(\sum_{\substack{(b, n_1) = n_1/d \\ b \equiv k \pmod{q} \\ b \leq Y_1}} 1 \right) \\ &= \varphi(n) \sum_{d | n_1} \frac{\mu(d)}{\varphi(d)} \left(\frac{Y_1}{qn_1} \varphi(d) + O(\tau(d)) \right) \\ &= \frac{\varphi(n) Y_1}{qn_1} \sum_{d | n_1} \mu(d) + O\left(\varphi(n) \sum_{d | n} \frac{|\mu(d) \tau(d)|}{\varphi(d)}\right). \end{aligned} \quad (15)$$

由引理 2.3.3 的(i) 及引理 2.4.2 的(iii), 可知

$$\begin{aligned} \sum_{d | n} \frac{|\mu(d) \tau(d)|}{\varphi(d)} &= \prod_{p | n} \left(1 + \frac{2}{p-1}\right) \leq \prod_{p | n} \left(1 + \frac{1}{p-1}\right)^2 \\ &= \left(\frac{n}{\varphi(n)}\right)^2 = O((\log \log 6n)^2). \end{aligned}$$

又, 由于 $q \geq 3$, χ 为模 q 的非主特征, 所以由定理 1.2.2 的(iii) 可知

$$\sum_{\substack{k=1 \\ (k,q)=1}}^q \chi(k) = 0.$$

因此,由(14)及(15)可得

$$\sum_{r \leq Y} \tau_Q(r) c_n(r) \chi(r) = O(Q\varphi(qn)(\log \log 6n)^2).$$

证毕。

现在我们来证明定理 3.3.1。我们有

$$\begin{aligned} S(Q, x) &= \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{n_1 \equiv n_2 \pmod{q} \\ n_i \leq x, (n_i, q) = 1 \\ i=1,2}} \Lambda(n_1) \Lambda(n_2) - \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi(q)} \left(\sum_{\substack{(n, q) = 1 \\ n \leq x}} \Lambda(n) \right)^2 \\ &= \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) = 1}} (\Lambda(n))^2 \\ &\quad + 2 \sum_{q \leq Q} \sum_{1 \leq r \leq x-1} \sum_{\substack{1 \leq n \leq x-r \\ q \mid r \\ (n(n+r), q) = 1}} \Lambda(n) \Lambda(n+r) \\ &\quad - \sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi(q)} \left(\sum_{\substack{(n, q) = 1 \\ n \leq x}} \Lambda(n) \right)^2. \end{aligned} \quad (16)$$

由定理 1.6.1(iii)、引理 2.3.2 的(xi)、及引理 3.2.3,我们分别有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) = 1}} \Lambda(n) &= \psi(x) + O(L^2) = x + O(xe^{-2c\sqrt{L}}), \\ \sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) = 1}} \Lambda^2(n) &= \sum_{n \leq x} \Lambda^2(n) + O(L^3) = x \log x + O(x), \end{aligned}$$

$$\sum_{q \leq Q} \frac{1}{\varphi(q)} = c_1 \log Q + c_1 \gamma - c_2 + O\left(\frac{(\log Q)^2}{Q}\right),$$

其中 $L = \log x$, γ 为 Euler 常数(见引理 2.3.2 的(xii)), 而

$$c_1 = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{|\mu(d)|}{d\varphi(d)}, c_2 = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{|\mu(d)| \log d}{d\varphi(d)}.$$

显然

$$\sum_{\substack{1 \leq n \leq x-r \\ (n(n+r), q) > 1}} \Lambda(n) \Lambda(n+r) \ll L^2 \left(\sum_{\substack{p^m \leq x \\ p \mid q}} 1 \right) \ll L^3.$$

所以,应用引理 3.3.3 的(iv) 可得

$$\begin{aligned} & \sum_{q \leq Q} \sum_{1 \leq r \leq x-1} \sum_{\substack{1 \leq n \leq x-r \\ (n(n+r), q) = 1}} \Lambda(n) \Lambda(n+r) \\ &= \sum_{q \leq Q} \sum_{1 \leq r \leq x-1} \sum_{\substack{n \leq x-r \\ q \mid r}} \Lambda(n) \Lambda(n+r) + O(L^3 \sum_{r \leq x} \tau(r)) \\ &= \sum_{1 \leq r \leq x-1} \tau_Q(r) \left(\sum_{1 \leq n \leq x-r} \Lambda(n) \Lambda(n+r) \right) + O(xL^4), \end{aligned}$$

其中 $\tau_Q(r) = \sum_{\substack{q \mid r \\ 1 \leq q \leq Q}} 1$ 。于是,由(16) 我们得

$$\begin{aligned} S(Q, x) &= xQ \log x - x^2(c_1 \log Q + c_1 \gamma - c_2) + \\ &\quad 2 \left(\sum \right) + O(Qx), \end{aligned} \quad (17)$$

这里

$$\sum = \sum_{r \leq x-1} \tau_Q(r) \left(\sum_{1 \leq n \leq x-r} \Lambda(n) \Lambda(n+r) \right).$$

我们可用圆法对 \sum 加以处理。令 $\tau = xP^{-4/3}$, P 由(1) 给出。对于满足 $(a, q) = 1$ 及 $1 \leq q \leq q \leq P$ 的正整数 a 与 q , 令 $m(q, a)$ 为如下的闭区间

$$m(q, a) = \left[\frac{a}{q} - (q\tau)^{-1}, \frac{a}{q} + (q\tau)^{-1} \right],$$

并设 m 为所有这种区间的并集, 而 B 为 m 在区间 $[\tau^{-1}, 1 + \tau^{-1}]$ 中的补集。容易证明: 若 $\frac{a}{q} \neq \frac{a'}{q'}$, $(a, q) = (a', q') = 1$, $1 \leq a \leq q \leq P$, $1 \leq a' \leq q' \leq P$, 则 $m(q, a)$ 与 $m(q', a')$ 是互不相交的。由于 m 是一些互不相交的包含于 $[\tau^{-1}, 1 + \tau^{-1}]$ 中的闭区间组成的, 所以 B 也是由一些区间构成的。简记 $E = \tau^{-1}$ 。设

$$S(\alpha) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) e(n\alpha), e(\xi) = \exp(2\pi i \xi),$$

则

$$\begin{aligned}\sum_{n \leq x-r} \Lambda(n) \Lambda(n+r) &= \int_E^{1+E} |S(\alpha)|^2 e(-r\alpha) d\alpha \\ &= \int_m + \int_{B^\circ}.\end{aligned}\quad (18)$$

设

$$\tilde{S}(\alpha) = \sum_{r \leq x-1} \tau_Q(r) e(-r\alpha).$$

可与 § 3.2 的(2) 与(3) 之间的讨论类似地证明: 对任一 $\alpha \in B$, 都存在正有理数 $a/q, (a, q) = 1$, 且 $a = q + 1, q = [\tau]$ 或 $1 \leq a \leq q, P \leq q \leq \tau$, 使得

$$\left| \alpha - \frac{a}{q} \right| < \frac{1}{q\tau}.$$

若 $a = q + 1, q = [\tau]$, 则由 $|(\alpha - 1) - \frac{1}{q}| < \frac{1}{q\tau}$ 及引理 3.3.5 可得

$$\begin{aligned}S(\alpha) &= S(\alpha - 1) \ll (1 + x\tau^{-2})(x\tau^{-1/2} + x^{4/5} + (x\tau)^{1/2} + \tau)L^4 \\ &\ll (x\tau)^{1/2}L^4 = xP^{-1/2}L^4.\end{aligned}$$

若 $1 \leq a \leq q, P \leq q \leq \tau$, 则由 $|\alpha - \frac{a}{q}| < \frac{1}{q\tau}$ 及引理 3.3.5 可得估计

$$\begin{aligned}S(\alpha) &\ll (1 + P^{-1}\tau^{-1}x)(xP^{-1/2} + x^{4/5} + (x\tau)^{1/2} + \tau)L^4 \\ &\ll xP^{-1/6}L^4.\end{aligned}$$

因此, 由 Cauchy 不等式可得

$$\begin{aligned}&\sum_{r \leq x-1} \tau_Q(r) \int_B |S(\alpha)|^2 e(-r\alpha) d\alpha \\ &\ll \left(\max_{\alpha \in B} |S(\alpha)| \right) \int_E^{1+E} |S(\alpha)| \tilde{S}(\alpha) d\alpha \\ &\ll xP^{-1/6}L^4 J_1^{1/2} J_2^{1/2}\end{aligned}\quad (19)$$

这里(分别应用引理 2.3.2 的(xi) 与引理 3.3.3 的(iv))

$$J_1 = \int_E^{1+E} |S(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{n \leq x} (\Lambda(n))^2 \ll xL,$$

$$J_2 = \int_E^{1+E} |\tilde{S}(\alpha)|^2 d\alpha = \sum_{n \leq x} (\tau_Q(n))^2 \ll \sum_{n \leq x} (\tau(n))^2 \ll xL^3.$$

由(17) ~ (19) 我们得

$$\sum = \sum_{r \leq x-1} \tau_Q(r) \int_m |S(a)|^2 e(-ra) da + O(Qx). \quad (20)$$

对于一个正整数 $q, q \leq P$, 令

$$\theta(q) = \begin{cases} 1, & \text{若 } \theta = 1 \text{ 且 } \tilde{q} | q, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

这里 θ 的定义为: 若 P -例外组 $(\tilde{q}, \tilde{\chi}, \tilde{\beta})$ 存在, 则 $\theta = 1$, 否则 $\theta = 0$ (关于 P -例外组的定义, 见定理 1.5.2). 对模 q 的任一特征 χ 及实数 z , 令

$$S(\chi, z) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) \chi(n) e(nz), \quad \tau(\chi) = \sum_{1 \leq h \leq q} \chi(h) e\left(\frac{h}{q}\right),$$

这里 $\tau(\chi)$ 为 Gauss 和。又令

$$F(\chi_q^0, z) = S(\chi_q^0, z) - R(z), \quad R(z) = \sum_{n \leq x} e(nz),$$

这里 χ_q^0 为模 q 的主特征。若 $\theta(q) = 0$, 令

$$F(\chi, z) = S(\chi, z), \quad \chi \neq \chi_q^0,$$

而若 $\theta(q) = 1$, 则令

$$F(\tilde{\chi}\chi_q^0, z) = S(\tilde{\chi}\chi_q^0, z) + \tilde{R}(z), \quad \tilde{R}(z) = \sum_{m \leq z} m^{\tilde{\beta}-1} e(mz),$$

$$F(\chi, z) = S(\chi, z), \quad \chi \neq \chi_q^0, \quad \chi \neq \tilde{\chi}\chi_q^0.$$

当 $\alpha = \frac{a}{q} + z, 1 \leq a \leq q \leq P, (a, q) = 1$ 且 $|z| \leq (q\tau)^{-1}$ 时, 可与 § 3.2 的(14) 同样地得

$$S(\alpha) = \frac{\mu(q)}{\varphi(q)} R(z) - \frac{\theta(q) \tau(\tilde{\chi}\chi_q^0) \tilde{\chi}(a) \tilde{R}(z)}{\varphi(q)}$$

$$+ \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \tau(\tilde{\chi}) \chi(a) F(\chi, z) + O(L^2).$$

由此可得

$$\begin{aligned} |S(\alpha)|^2 &= \frac{|\mu(q)|}{\varphi^2(q)} |R(z)|^2 + \theta(q) \frac{|\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2 |\tilde{R}(z)|^2}{\varphi^2(q)} \\ &\quad - \frac{\theta(q)\mu(q) \overline{R(z)} \tilde{R}(z) \tilde{\chi}(a) \tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)}{\varphi^2(q)} \\ &\quad - \frac{\theta(q)\mu(q) R(z) \tilde{\chi}(a) \overline{\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)} \tilde{T}(z)}{\varphi^2(q)} \\ &\quad + O\left(\frac{|\mu(q)| |R(z)|}{\varphi^2(q)} \left| \sum_{\chi \bmod q} \chi(a) \tau(\bar{\chi}) F(\chi, z) \right| \right) \\ &\quad + O\left(\frac{\theta(q) |\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0) \tilde{R}(z)|}{\varphi^2(q)} \left| \sum_{\chi \bmod q} \chi(a) \tau(\bar{\chi}) F(\chi, z) \right| \right) \\ &\quad + O\left(\frac{1}{\varphi^2(q)} \left| \sum_{\chi \bmod q} \chi(a) \tau(\bar{\chi}) F(\chi, z) \right|^2\right) \\ &\quad + O\left(\left(\frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)} |R(z)| + \frac{\theta(q) |\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0) \tilde{R}(z)|}{\varphi(q)} \right.\right. \\ &\quad \left.\left. + \frac{1}{\varphi(q)} \left| \sum_{\chi \bmod q} \chi(a) \tau(\bar{\chi}) F(\chi, z) \right| \right) L^2\right) + O(L^4) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq 4} S_i + O\left(\sum_{5 \leq i \leq 11} |S_i|\right). \end{aligned}$$

由 Cauchy 不等式, 可知 $S_7 + S_{11} \gg S_{10}$ 。所以我们只要处理 $S_i, i \neq$

10。令 $I(q)$ 为闭区间 $[-(q\tau)^{-1}, (q\tau)^{-1}]$, 我们得

$$\begin{aligned} \int_m |S(\alpha)|^2 e(-r\alpha) d\alpha &= \\ \sum_{q \leq P(a, q)=1} \sum_{1 \leq a \leq q} \int_{I(q)} |S(z + \frac{a}{q})|^2 e(-r(\frac{a}{q} + z)) dz \\ &= \sum_{q \leq P(a, q)=1} \sum_{1 \leq a \leq q} e(-\frac{ra}{q}) \int_{I(q)} \left(\sum_{1 \leq i \leq 4} S_i + O\left(\sum_{\substack{5 \leq i \leq 11 \\ i \neq 10}} |S_i|\right) \right) e(-rz) dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{1 \leq i \leq 4} \sum_{q \leq P(a, q)=1} \sum_{1 \leq a \leq q} e\left(-\frac{ra}{q}\right) \int_{I(q)} S_i e(-rz) dz \\
&\quad + O\left(\sum_{\substack{5 \leq i \leq 11 \\ i \neq 10}} \sum_{q \leq P(a, q)=1} \sum_{1 \leq a \leq q} \int_{I(q)} |S_i| dz\right) \\
&= \sum_{1 \leq i \leq 4} T_i + O\left(\sum_{\substack{5 \leq i \leq 11 \\ i \neq 10}} |T_i|\right). \tag{21}
\end{aligned}$$

我们估计 T_5 。由 Cauchy 不等式可得

$$T_5 \ll \left(\sum_{q \leq P} \frac{1}{\varphi(q)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{q \leq P} \varphi(q) \left(\int_{I(q)} \left(\sum_{\substack{(a, q)=1 \\ 1 \leq a \leq q}} |S_5|\right) dz\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由引理 3.2.3 可知

$$\sum_{q \leq P} \frac{1}{\varphi(q)} \ll \log P \ll (\log x)^{1/2} = L^{1/2}.$$

再应用关于积分的 Cauchy 不等式, 对固定的 q , 又得

$$\left(\int_{I(q)} \left(\sum_{\substack{(a, q)=1 \\ 1 \leq a \leq q}} |S_5|\right) dz\right)^2 \leq \frac{1}{\varphi^4(q)} \cdot I_1 \cdot I_2,$$

其中

$$I_1 = \int_{I(q)} |R(z)|^2 \leq \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |R(z)|^2 dz = x + O(1),$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_{I(q)} \left(\sum_{\substack{(a, q)=1 \\ 1 \leq a \leq q}} \left|\sum_{\chi \pmod{q}} \chi(a) \tau(\overline{\chi}) F(\chi, z)\right|\right)^2 dz \\
&\leq \varphi^2(q) \left(\int_{I(q)} \left(\sum_{\chi \pmod{q}} |\tau(\overline{\chi}) F(\chi, z)|^2\right) dz\right);
\end{aligned}$$

这里我们已用到(可由 Cauchy 不等式及特征的性质得到)

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{\substack{1 \leq a \leq q \\ (a, q)=1}} \left|\sum_{\chi \pmod{q}} \chi(a) \tau(\overline{\chi}) F(\chi, z)\right|\right)^2 \\
&\leq \varphi(q) \sum_{\substack{(a, q)=1 \\ 1 \leq a \leq q}} \left|\sum_{\chi \pmod{q}} \chi(a) \tau(\overline{\chi}) F(\chi, z)\right|^2
\end{aligned}$$

$$= \varphi^2(q) \sum_{\chi \bmod q} |\tau(\bar{\chi}) F(\chi, z)|^2.$$

因此

$$T_5 \ll x^{1/2} \cdot L^{1/2} \cdot \left(\sum_{q \leq P} \frac{1}{\varphi(q)} \left(\int_{I(q)} \left(\sum_{\chi \bmod q} |\tau(\bar{\chi}) F(\chi, z)|^2 \right) dz \right) \right)^{1/2}. \quad (22)$$

接下去,可与 § 3.2 的(21)与(22)之间的那个估计类似地得(又参见 § 3.2 的(18))

$$\begin{aligned} & \sum_{q \leq P} \frac{1}{\varphi(q)} \left(\int_{I(q)} \left(\sum_{\chi \bmod q} |\tau(\bar{\chi}) F(\chi, z)|^2 \right) dz \right) \\ & \ll \sum_{q \leq P} \frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)} \left(\int_{I(q)} |F(\chi_q^0, z)|^2 dz \right) + L \cdot T_{51} + \\ & PL^4 \tau^{-1}, \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$T_{51} = \sum_{3 \leq m \leq P} \sum_{\chi \bmod m}^* \left(\int_{I(m)} |F(\chi, z)|^2 dz \right).$$

对于给定的正整数 $m, 3 \leq m \leq P$, 及模 m 的任一原特征 χ , 我们可与 § 3.2 的(38)类似地得到

$$\begin{aligned} \int_{I(m)} |F(\chi, z)|^2 dz & \ll x \left[\left(\sum_{|t| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right)^2 + \sum_{|t| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right] \\ & + (1 + x\sigma^{-1})^2 L^2 T^{-1} x, \end{aligned} \quad (24)$$

其中 $T = P^5 = \exp(35c(\log x)^{\frac{1}{2}}), \sigma = \frac{1}{2}m\tau, \sum_{|t| \leq T}$ 表示对于

$L(s, \chi)$ 的所有满足 $\rho = \beta + it, |t| \leq T$ 及 $\rho \neq \tilde{\beta}, 1 - \tilde{\beta}$ 的非平凡零点 ρ 求和, $\tilde{\beta}$ 为 P -例外零点(当然可能 $\tilde{\beta}$ 不存在, 定义见定理 1.5.2)。接下去, 我们又可与 § 3.2 的(41)~(46)类似地证得(应用本节(1))

$$\sum_{3 \leq m \leq P} \sum_{\chi \bmod m}^* \sum_{|t| \leq T} y^{\beta-1} \ll P^2 T y^{-1/12} L + y^{\beta-1} (\log L)^3$$

$$\ll P^{-1/3}, \quad (25)$$

这里 $y = xT^{-1}$, $\beta' = 1 - \frac{c_2}{2L_1}$, $L_1 = \log(P(T+2))$, c_2 即为定理 1.5.2 中的常数。由 (24) 与 (25), 我们得

$$\begin{aligned} T_{51} &\ll x \left(\sum_{3 \leq m \leq P} \sum_{\chi \bmod m}^* \widetilde{\sum_{|t| \leq T}} y^{\beta-1} \right)^2 + x \left(\sum_{3 \leq m \leq P} \sum_{\chi \bmod m}^* \widetilde{\sum_{|t| \leq T}} y^{\beta-1} \right) \\ &\quad + x(L^2 P^2 T^{-1} + x^2 P^2 \sigma^{-2} L^2 T^{-1}) \ll xP^{-1/3}. \end{aligned} \quad (26)$$

设 $q \leq P$, 我们可与 § 3.2 的 (49) 和 (51) 类似地得 (注意, 这里

$$\sigma = \frac{1}{2} q\tau, I(q) = [-(q\tau)^{-1}, (q\tau)^{-1}])$$

$$\begin{aligned} \int_{I(q)} |F(\chi_q^0, z)|^2 dz &\ll x \left(\sum_{|t| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right)^2 + \\ &\quad x \left(\sum_{|t| \leq T} (xT^{-1})^{\beta-1} \right) + (xT^{-1} + x^3 T^{-1} \tau^{-2}) L^2 \\ &\ll x((xT^{-1})^{\beta''-1} + T^{-1} P^3) L^2 \ll xP^{-1/3}, \end{aligned} \quad (27)$$

这里 $\sum_{|t| \leq T}$ 表示对 $\zeta(s)$ 的所有满足 $\rho = \beta + it$ 和 $|t| \leq T$ 的非平

凡零点 ρ 求和, $\beta'' = 1 - \frac{c_{16}}{2L_2}$, $L_2 = \log(T+2)$, c_{16} 为定理 1.5.8 中的常数。由 (22)、(23)、(26) 和 (27), 我们得

$$T_5 \ll xP^{-1/6} L.$$

类似地, 我们有

$$T_6, T_7 \ll xP^{-1/6} L.$$

应用 Cauchy 不等式, 容易得

$$\begin{aligned} T_8 &\ll L^2 \sum_{q \leq P} |\mu(q)| \int_{I(q)} |R(z)| dz \\ &\ll L^2 \sum_{q \leq P} |\mu(q)| \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |R(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \cdot (q\tau)^{-\frac{1}{2}} \\ &\ll \left(\frac{x}{\tau} \right)^{1/2} P^{1/2} L^2 \ll x^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_9 &\ll L^2 \sum_{q \leq P} \theta(q) |\tau(\tilde{\chi} \chi_q^0)| \left(\int_{I(q)} |\tilde{R}(z)| dz \right) \\
&\ll \theta L^2 \cdot \sum_{m \leq P} r^{\frac{1}{2}} \left(\int_{I(m\tilde{r})} |\tilde{R}(z)| dz \right) \\
&\ll \theta L^2 r^{1/2} \sum_{m \leq P} \left(\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\tilde{R}(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{(mr\tau)^{1/2}} \\
&\ll \theta L^2 P^{1/2} \left(\frac{x}{\tau} \right)^{1/2} \ll x^{1/3}, \\
T_{11} &\ll L^4 \sum_{q \leq P} \frac{\varphi(q)}{q\tau} \ll L^4 P\tau^{-1} \ll x^{\frac{1}{3}}.
\end{aligned}$$

对于 T_3 , 我们看到

$$\begin{aligned}
T_3 = & - \sum_{q \leq P} \frac{\theta(q)\mu(q)}{\varphi^2(q)} \left(\sum_{\substack{(a,q)=1 \\ 1 \leq a \leq q}} e\left(-\frac{ar}{q}\right) \tilde{\chi}(a) \right) \tau(\tilde{\chi} \chi_q^0) \times \\
& \left(\int_{I(q)} \overline{T(z)} \cdot \tilde{T}(z) e(-rz) dz \right).
\end{aligned}$$

由引理 1.1.3, 当 $\theta = 1$ 时可得

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(z) = & \sum_{n \leq x} n^{\tilde{\beta}-1} e(nz) = - \int_1^x (\tilde{\beta} - 1) u^{\tilde{\beta}-2} \left(\sum_{n \leq x} e(nz) \right) du + \\
& + x^{\tilde{\beta}-1} \left(\sum_{n \leq x} e(nz) \right).
\end{aligned}$$

因此, 应用引理 3.3.4(i) 可得

$$\begin{aligned}
\tilde{T}(z) &\ll (1 - \tilde{\beta}) \int_1^x u^{\tilde{\beta}-2} \min\left(u, \frac{1}{\|z\|}\right) du + x^{\tilde{\beta}-1} \min\left(x, \frac{1}{\|z\|}\right) \\
&\ll \min\left(x, \frac{1}{\|z\|}\right) \left((1 - \tilde{\beta}) \int_1^x u^{\tilde{\beta}-2} du + 1 \right) \\
&\ll \min\left(x, \frac{1}{\|z\|}\right). \tag{28}
\end{aligned}$$

应用引理 3.3.4 的(i) 可知 $|T(z)| \ll \min\left(x, \frac{1}{\|z\|}\right)$ 。由此及(28) 可得

$$\int_{I(q)} \overline{T(z)} \cdot \tilde{T}(z) e(-rz) dz = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \overline{T(z)} \cdot \tilde{T}(z) e(-rz) dz$$

$$\begin{aligned}
& + O\left(\int_{1/q\tau}^{\frac{1}{2}} \min\left(x, \frac{1}{\|z\|}\right)^2 dz\right) \\
& = \sum_{\substack{m-n=r \\ 1 \leq n, m \leq x}} m^{\tilde{\beta}-1} + O\left(\int_{1/q\tau}^{\frac{1}{2}} \min\left(x, \frac{1}{z}\right)^2 dz\right) \\
& = \sum_{r < m \leq x} m^{\tilde{\beta}-1} + O(q\tau). \tag{29}
\end{aligned}$$

因此,若设 $(\tilde{q}, \tilde{\chi}, \tilde{\beta})$ 为 P -例外组,则

$$\begin{aligned}
T_3 = & -\theta \sum_{\substack{q\tilde{q} \leq P \\ (q, \tilde{q})=1}} \frac{\mu(q\tilde{q})}{\varphi^2(q\tilde{q})} \tau(\tilde{\chi}\chi_{q\tilde{q}}^{0_{\tilde{q}}}) \left(\sum_{\substack{(a, q\tilde{q})=1 \\ 1 \leq a \leq q\tilde{q}}} \tilde{\chi}(a) e\left(-\frac{ar}{q\tilde{q}}\right) \right) \times \\
& \times \left(\sum_{r < m \leq x} m^{\tilde{\beta}-1} + O(q\tau) \right). \tag{30}
\end{aligned}$$

对于 $\theta = 1$,由引理 1.2.3 的(i) 与(iii),我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{(a, q\tilde{q})=1 \\ 1 \leq a \leq q, \tilde{q}}} \tilde{\chi}(a) e\left(-\frac{ar}{q\tilde{q}}\right) & = \sum_{\substack{(x_1, \tilde{q})=1 \\ 1 \leq x_1 \leq \tilde{q}}} \sum_{\substack{(x_2, q)=1 \\ 1 \leq x_2 \leq q}} \tilde{\chi}(qx_1 + \tilde{q}x_2) e\left(-\frac{r(qx_1 + \tilde{q}x_2)}{q\tilde{q}}\right) \\
& = \tilde{\chi}(q) \left(\sum_{\substack{(x_1, \tilde{q})=1 \\ 1 \leq x_1 \leq \tilde{q}}} \tilde{\chi}(x_1) e\left(-\frac{rx_1}{\tilde{q}}\right) \right) \left(\sum_{\substack{(x_2, q)=1 \\ 1 \leq x_2 \leq q}} e\left(-\frac{rx_2}{q}\right) \right) \\
& = \tilde{\chi}(q) \tilde{\chi}(r) \overline{\tau(\tilde{\chi})} c_q(r); \tag{31}
\end{aligned}$$

其中我们注意到,当 x_1 和 x_2 分别通过模 \tilde{q} 和模 q 的一个缩剩余系时,形如 $qx_1 + \tilde{q}x_2$ 的数通过模 $q\tilde{q}$ 的一个缩剩余系。类似地,由定理 1.2.3 的(i) 与(iii) 可得

$$\begin{aligned}
\tau(\tilde{\chi}\chi_{q\tilde{q}}^{0_{\tilde{q}}}) & = \sum_{\substack{1 \leq a \leq q\tilde{q} \\ (a, q\tilde{q})=1}} (\tilde{\chi}\chi_{q\tilde{q}}^{0_{\tilde{q}}})(a) e\left(\frac{a}{q\tilde{q}}\right) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{\substack{1 \leq x_1 \leq \tilde{q} \\ (x_1, \tilde{q}) = 1}} \sum_{\substack{1 \leq x_2 \leq q \\ (x_2, q) = 1}} \tilde{\chi}(qx_1 + \tilde{q}x_2) \cdot e\left(\frac{qx_1 + \tilde{q}x_2}{q\tilde{q}}\right) \\
&= \tilde{\chi}(q) \left(\sum_{\substack{1 \leq x_1 \leq \tilde{q} \\ (x_1, \tilde{q}) = 1}} \tilde{\chi}(x_1) e\left(\frac{x_1}{\tilde{q}}\right) \right) \left(\sum_{\substack{1 \leq x_2 \leq q \\ (x_2, q) = 1}} e\left(\frac{x_2}{q}\right) \right) \\
&= \tilde{\chi}(q) \tau(\tilde{\chi}) \mu(q). \tag{32}
\end{aligned}$$

由(30)、(31)和(32),并应用定理 1.2.3 的(ii),可得

$$\begin{aligned}
T_3 &= -\theta\mu(\tilde{q}) \sum_{\substack{\tilde{q}q \leq P \\ (q, \tilde{q}) = 1}} |\tau(\tilde{\chi})|^2 \frac{\mu(q)}{\varphi^2(q\tilde{q})} \tilde{\chi}(r) c_q(r) \left(\sum_{r < m \leq x} m^{\tilde{\beta}-1} \right) \\
&\quad + O(\Delta),
\end{aligned}$$

这里(应用引理 2.4.2 的(iii))

$$\Delta = \sum_{\tilde{q}q \leq P} \frac{\tilde{q}q^2 \tau}{\varphi^2(q) \varphi^2(\tilde{q})} \ll \tau \sum_{q \leq P} \frac{q^2}{\varphi^2(q)} \ll \tau P(\log L)^2.$$

由定理 1.2.3 的(ii)、引理 3.3.7 的(ii)、引理 2.2.3 的(ii)、引理 3.3.3 的(iv)及引理 2.3.2 的(viii),我们得(注意, $\theta = 1$ 时 $\tilde{q} \geq 3$)

$$\begin{aligned}
\sum_{r \leq x-1} \tau_Q(\tau) T_3 &= -\theta\mu(\tilde{q}) \sum_{1 < m \leq x} m^{\tilde{\beta}-1} \sum_{\substack{\tilde{q}q \leq P \\ (\tilde{q}, q=1)}} \frac{\tilde{q} |\mu(q)|}{\varphi^2(q\tilde{q})} \\
&\quad \times \left(\sum_{r < m} \tau_Q(r) \tilde{\chi}(r) c_q(r) \right) + O(\tau P(\log L)^2 \sum_{r \leq x} \tau(r)) \\
&= O(\theta Qx(\log L)^2 \sum_{\tilde{q}q \leq P} \frac{\tilde{q}}{\varphi(\tilde{q})} \cdot \frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)}) + O(\tau P(\log L)^2 xL) \\
&= O(Qx(\log L)^3 \sum_{q \leq P} \frac{|\mu(q)|}{\varphi(q)}) + O(Qx) \\
&= O(QxL^{1/2}(\log L)^3). \tag{33}
\end{aligned}$$

类似地,我们得

$$\sum_{r \leq x-1} \tau_Q(r) T_4 = O(QxL^{1/2}(\log L)^3). \quad (34)$$

我们有(参见(29))

$$\begin{aligned} T_2 &= \sum_{q \leq P} \frac{\theta(q) |\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2 c_q(r)}{\varphi^2(q)} \left(\int_{I(q)} |\tilde{T}(z)|^2 e(-rz) dz \right) \\ &= \sum_{q \leq P} \frac{\theta(q) |\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2}{\varphi^2(q)} c_q(r) \left(\sum_{m \leq x-r} (m(m+r))^{\tilde{\beta}-1} + O(q\tau) \right) \\ &= \sum_{q \leq P} \frac{\theta(q) |\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2 c_q(r)}{\varphi^2(q)} \sum_{m \leq x-r} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_m^{m+r} (\tilde{\beta}-1) u^{\tilde{\beta}-2} du \right. \\ &\quad \left. + m^{\tilde{\beta}-1} \right) + O\left(\sum_{q \leq P} \frac{\theta(q) q\tau}{\varphi^2(q)} |\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2 |c_q(r)|\right). \end{aligned}$$

由定理 1.2.3(ii)、 $|c_q(r)| \leq \varphi(q)$ 、引理 2.4.2 的(iii)、以及 $\tilde{q} \leq P$, 可得

$$\frac{\theta(q) q\tau}{\varphi^2(q)} |\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2 |c_q(r)| \ll \frac{q\tilde{q}\tau}{\varphi(q)} \ll L\tilde{q}\tau \ll P\tau L,$$

因此, 由引理 2.3.2 的(ii) 及引理 3.3.3 的(iv), 我们得

$$\begin{aligned} \sum_{r \leq x} \tau_Q(r) \left(\sum_{q \leq P} \frac{\theta(q) q\tau}{\varphi^2(q)} |\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2 |c_q(r)| \right) &\ll P\tau L \cdot \sum_{r \leq x} \tau(r) \\ &\ll xP\tau L^2 = O(Qx). \end{aligned}$$

于是, 设 $y = x - 1$, 并交换积分与求和的顺序, 可得

$$\begin{aligned} \sum_{r \leq y} \tau_Q(r) T_2 &= \sum_{q \leq P} \frac{\theta(q) |\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2}{\varphi^2(q)} \times \\ &\sum_{m \leq y} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\sum_{r \leq x-m} \tau_Q(r) c_q(r) \left(\int_m^{m+r} (\tilde{\beta}-1) u^{\tilde{\beta}-2} du + m^{\tilde{\beta}-1} \right) \right) + O(Qx) \\ &= \sum_{q \leq P} \frac{\theta(q) |\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2}{\varphi^2(q)} \left(\sum_{m \leq y} m^{\tilde{\beta}-1} \left[\int_m^x (\tilde{\beta}-1) \times \right. \right. \\ &\quad \left. \left. u^{\tilde{\beta}-2} \left(\sum_{u-m \leq r \leq x-m} \tau_Q(r) C_q(r) \right) du \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + m^{\tilde{\beta}-1} \left(\sum_{r \leq x-m} \tau_Q(r) c_q(r) \right) \right] \right) + O(Qx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{q \leq P} \frac{\theta(q) |\tau(\tilde{\chi} \chi_q^0)|^2}{\varphi^2(q)} \left(\sum_{m \leq \gamma} m^{\tilde{\beta}-1} \left[\int_{m+1}^x (\tilde{\beta} - 1) u^{\tilde{\beta}-2} \times \right. \right. \\
&\quad \left. \left(\sum_{u-m \leq r \leq x-m} \tau_Q(r) c_q(r) \right) du \right. \\
&\quad \left. \left. + m^{\tilde{\beta}-1} \left(\sum_{r \leq x-m} \tau_Q(r) c_q(r) \right) \right] \right) + O(Qx). \quad (35)
\end{aligned}$$

设 $\theta(q) = 1$ 。用引理 3.3.7 的(i) 去处理(35) 式右边最内侧的求和, 得

$$\begin{aligned}
\sum_{u-m \leq r \leq x-m} \tau_Q(r) c_q(r) &= [(x-m) \log(\min(x-m, Q)) \\
&\quad - (u-m) \log(\min(u-m, Q))] \frac{\varphi(q)}{q} \\
&\quad + (x-u) \frac{\varphi(q)}{q} (\gamma - \log q) \\
&\quad + O\left(Q \frac{q^2}{\varphi(q)}\right),
\end{aligned}$$

所以, 在 $\theta = 1$ 时

$$\begin{aligned}
&\frac{q}{\varphi(q)} \sum_{m \leq \gamma} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_{m+1}^x (\tilde{\beta} - 1) u^{\tilde{\beta}-2} \left(\sum_{u-m \leq r \leq x-m} \tau_Q(r) c_q(r) \right) du \right) \\
&= \sum_{m \leq \gamma} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_{m+1}^x (\tilde{\beta} - 1) u^{\tilde{\beta}-2} ((x-m)(\log(\min(x-m, Q)) + \gamma \right. \\
&\quad \left. - \log q) - (u-m)(\log(\min(u-m, Q)) + \gamma - \log q)) du \right) \\
&\quad + O\left(xO \frac{q^3}{\varphi^2(q)}\right) \\
&= I_1 + I_2 + I_3 + O\left(xQ \frac{q^3}{\varphi^2(q)}\right),
\end{aligned}$$

这里

$$\begin{aligned}
I_1 &= \sum_{m \leq x-Q} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_{m+1}^{m+Q} (\tilde{\beta} - 1) u^{\tilde{\beta}-2} [(x-m)(\log Q + \gamma \right. \\
&\quad \left. - \log q) - (u-m)(\log(u-m) + \gamma - \log q)] du \right) \\
&= \sum_{m \leq x-Q} (m(m+Q))^{\tilde{\beta}-1} (x-m-Q)(\log Q + \gamma - \log q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m \leq x-Q} (m(m+1))^{\tilde{\beta}-1} [(x-m)(\log Q + \gamma - \log q) + \log q - \gamma] + \\
& \sum_{m \leq x-Q} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_{m+1}^{m+Q} u^{\tilde{\beta}-1} [\log(u-m) + \gamma - \log q + 1] du \right), \\
I_2 &= \sum_{m \leq x-Q} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_{m+Q}^x (\tilde{\beta}-1) u^{\tilde{\beta}-2} [(x-m)(\log Q + \gamma - \log q) \right. \\
& \quad \left. - (u-m)(\log Q + \gamma - \log q)] du \right) \\
&= - \sum_{m \leq x-Q} (m(m+Q))^{\tilde{\beta}-1} (x-m-Q)(\log Q + \gamma - \log q) \\
& \quad + \sum_{m \leq x-Q} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_{m+Q}^x u^{\tilde{\beta}-1} (\log Q + \gamma - \log q) du \right) \\
I_3 &= \sum_{x-Q < m \leq x-1} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_{m+1}^x (\tilde{\beta}-1) u^{\tilde{\beta}-2} [(x-m)(\log(x-m) + \gamma - \right. \\
& \quad \left. \log q) - (u-m)(\log(u-m) + \gamma - \log q)] du \right) \\
&= - \sum_{x-Q < m \leq x-1} (m(m+1))^{\tilde{\beta}-1} [(x-m)(\log(x-m) + \gamma \\
& \quad - \log q) + \log q - \gamma] + \sum_{x-Q < m \leq x-1} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_{m+1}^x u^{\tilde{\beta}-1} (\log(u-m) + \gamma \right. \\
& \quad \left. - \log q + 1) du \right),
\end{aligned}$$

并且,在 $\theta = 1$ 时我们有

$$\begin{aligned}
& \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{m \leq x-1} m^{2\tilde{\beta}-2} \left(\sum_{r \leq x-m} \tau_Q(r) c_q(r) \right) \\
&= \sum_{m \leq x-1} m^{2\tilde{\beta}-2} [(x-m)(\log(\min(x-m, Q)) + \gamma - \log q) \\
& \quad + O\left(Q \frac{q^3}{\varphi^2(q)}\right)] \\
&= \sum_{m \leq x-Q} m^{2\tilde{\beta}-2} (x-m)(\log Q + \gamma - \log q) \\
& \quad + \sum_{x-Q < m \leq x-1} m^{2\tilde{\beta}-2} (x-m)(\log(x-m) + \gamma - \log q) \\
& \quad + O\left(Q \frac{q^3}{\varphi^2(q)}\right).
\end{aligned}$$

因此,在 $\theta = 1$ 时(注意:许多项互相抵消了)

$$\begin{aligned}
& \frac{q}{\varphi(q)} \sum_{m \leq y} m^{\tilde{\beta}-1} \left[\int_{m+1}^x (\tilde{\beta} - 1) u^{\tilde{\beta}-2} \left(\sum_{u-m \leq r \leq x-m} \tau_Q(r) c_q(r) \right) du \right. \\
& \quad \left. + m^{\tilde{\beta}-1} \left(\sum_{r \leq x-m} \tau_Q(r) c_q(r) \right) \right] \\
&= \sum_{m \leq x-Q} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_{m+1}^{m+Q} u^{\tilde{\beta}-1} (\log(u-m) + \gamma - \log q + 1) du \right) \\
& \quad + \sum_{m \leq x-Q} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_{m+Q}^x u^{\tilde{\beta}-1} (\log Q + \gamma - \log q) du \right) \\
& \quad + \sum_{x-Q < m \leq x-1} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_{m+1}^x u^{\tilde{\beta}-1} (\log(u-m) + \gamma - \log q + 1) du \right) \\
& \quad + O\left(xQ \frac{q^3}{\varphi^2(q)}\right) \\
&= \sum_{m \leq x-Q} m^{\tilde{\beta}-1} \frac{1}{\tilde{\beta}} (x^{\tilde{\beta}} - (m+Q)^{\tilde{\beta}}) (\log Q + \gamma - \log q) \\
& \quad + \sum_{m \leq x-Q} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_{m+1}^{m+Q} u^{\tilde{\beta}-1} \log(u-m) du \right) \\
& \quad + \sum_{x-Q < m \leq x-1} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_{m+1}^x u^{\tilde{\beta}-1} \log(u-m) du \right) + \\
& \quad O\left(xQ \frac{q^3}{\varphi^2(q)}\right). \tag{36}
\end{aligned}$$

由(35)及(36),我们得

$$\begin{aligned}
\sum_{r \leq x-1} \tau_Q(r) T_2 &= \theta \sum_{m \leq x-Q} \frac{m^{\tilde{\beta}-1}}{\tilde{\beta}} (x^{\tilde{\beta}} - (m+Q)^{\tilde{\beta}}) \times \\
& \quad \left(\sum_{q \leq P} \frac{\theta(q) |\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2}{q\varphi(q)} (\log Q + \gamma - \log q) \right) \\
& \quad + \theta \sum_{m \leq x-1} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_{m+1}^{\min(m+Q, x)} u^{\tilde{\beta}-1} \times \right. \\
& \quad \left. \log(u-m) du \right) \left(\sum_{q \leq P} \frac{\theta(q) |\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2}{q\varphi(q)} \right) \\
& \quad + O\left(xQ \sum_{q \leq P} \frac{\theta(q) |\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2 q^2}{\varphi^3(q)}\right). \tag{37}
\end{aligned}$$

由(25)、定理 1.2.3 的(ii)、引理 3.3.6 的(iii)、引理 2.4.2 的(iii)与引理 3.2.3, 可得

$$\begin{aligned}
 \sum_{q \leq P} \frac{\theta(q) |\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2}{q\varphi(q)} &= \theta \sum_{\substack{\tilde{q}m \leq P \\ (m, \tilde{q})=1}} \frac{|\mu(m)|}{m\varphi(m\tilde{q})} \\
 &= \frac{\theta}{\varphi(\tilde{q})} \left(\sum_{\substack{m=1 \\ (m, \tilde{q})=1}}^{\infty} \frac{|\mu(m)|}{m\varphi(m)} + O\left(\sum_{m > P\tilde{q}^{-1}} m^{-\frac{3}{2}}\right) \right) \\
 &= \frac{\theta}{\varphi(\tilde{q})} \sum_{\substack{m=1 \\ (m, \tilde{q})=1}}^{\infty} \frac{|\mu(q)|}{q\varphi(q)} + O(P^{-1/2}).
 \end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned}
 \sum_{q \leq P} \frac{\theta(q) |\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2 \log q}{q\varphi(q)} &= \\
 \theta \sum_{\substack{\tilde{q}m \leq P \\ (\tilde{q}, m)=1}} \frac{|\mu(m)| (\log \tilde{q} + \log m)}{m\varphi(m\tilde{q})} \\
 &= \theta \frac{\log \tilde{q}}{\varphi(\tilde{q})} \left(\sum_{\substack{m=1 \\ (m, \tilde{q})=1}}^{\infty} \frac{|\mu(m)|}{m\varphi(m)} \right) \\
 &\quad + \frac{\theta}{\varphi(\tilde{q})} \left(\sum_{\substack{m=1 \\ (m, \tilde{q})=1}}^{\infty} \frac{|\mu(m)| \log m}{m\varphi(m)} \right) + O(P^{-1/2}), \\
 \sum_{q \leq P} \frac{\theta(q) |\tau(\tilde{\chi}\chi_q^0)|^2}{q\varphi(q)} &= \theta \sum_{\substack{\tilde{q}m \leq P \\ (\tilde{q}, m)=1}} \frac{|\mu(m)|}{m\varphi(m\tilde{q})} \\
 &\leq \theta \cdot \frac{1}{\varphi(\tilde{q})} \left(\sum_{m \geq 1} \frac{|\mu(m)|}{m\varphi(m)} \right) \ll \theta \tilde{q}^{-1/2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{q \leq P} \frac{\theta(q) |\tau(\tilde{\chi} \chi_q^0)|^2 q^2}{\varphi^3(q)} &= \theta \sum_{\substack{\tilde{q} m \leq P \\ (\tilde{q}, m) = 1}} \frac{\tilde{q}^3 |\mu(m)| m^2}{\varphi^3(m\tilde{q})} = \\
&= \frac{\theta \tilde{q}^3}{\varphi^3(\tilde{q})} \sum_{\substack{\tilde{q} m \leq P \\ (m, \tilde{q}) = 1}} \frac{|\mu(m)| m^2}{\varphi^3(m)} \\
&\ll (\log L)^5 \sum_{m \leq P} \frac{1}{\varphi(m)} \ll L^{1/2} (\log L)^5.
\end{aligned}$$

因此,由(37)我们得

$$\begin{aligned}
\sum_{r \leq x-1} \tau_Q(r) T_2 &= \theta \sum_{m \leq x-Q} \frac{m^{\tilde{\beta}-1}}{\tilde{\beta}} (x^{\tilde{\beta}} - (m+Q)^{\tilde{\beta}}) [C(\tilde{q})(\log Q + \gamma) \\
&\quad - C_1(\tilde{q})] \\
&\quad + \theta \cdot C(\tilde{q}) \left(\sum_{m \leq x-1} m^{\tilde{\beta}-1} \left(\int_{m+1}^{\min(m+Q, x)} u^{\tilde{\beta}-1} \log(u-m) du \right) \right), \\
&\quad + O(xQL^{1/2}(\log L)^5), \tag{38}
\end{aligned}$$

此处

$$\begin{aligned}
C(\tilde{q}) &= \frac{1}{\varphi(\tilde{q})} \sum_{\substack{q=1 \\ (q, \tilde{q})=1}}^{\infty} \frac{|\mu(q)|}{q\varphi(q)}, \\
C_1(\tilde{q}) &= C(\tilde{q}) \log \tilde{q} + \frac{1}{\varphi(\tilde{q})} \left(\sum_{\substack{m=1 \\ (m, \tilde{q})=1}}^{\infty} \frac{|\mu(m)| \log m}{m\varphi(m)} \right).
\end{aligned}$$

对于 T_1 , 与对 T_2 的处理类似地, 我们有

$$\begin{aligned}
T_1 &= \sum_{q \leq P} \frac{|\mu(q)|}{\varphi^2(q)} c_q(r) \left(\int_{I(q)} |T(z)|^2 e(-rz) dz \right) \\
&= \sum_{q \leq P} \frac{|\mu(q)|}{\varphi^2(q)} c_q(r) (\gamma - r + O(q\tau)) \\
&= \sum_{q \leq P} \frac{|\mu(q)|}{\varphi^2(q)} c_q(r) \left(\int_r^\gamma du \right) + O(\tau PL).
\end{aligned}$$

因此,交换求和与积分的顺序可得

$$\begin{aligned}\sum_{r \leq x} \tau_Q(r) T_1 &= \sum_{q \leq P} \frac{|\mu(q)|}{\varphi^2(q)} \left(\sum_{r \leq y} \tau_Q(r) c_q(r) \left(\int_r^y du \right) \right) + O(x\tau PL^2) \\ &= \sum_{q \leq P} \frac{|\mu(q)|}{\varphi^2(q)} \left(\int_1^y \left(\sum_{r \leq u} \tau_Q(r) c_q(r) \right) du \right) + O(Qx),\end{aligned}$$

这里 $y = x - 1$, 并且我们已应用了 $|c_q(r)| \leq \varphi(q)$, 引理 2.4.2 的 (iii) 及引理 2.3.2 的 (viii)。 \circ 进一步, 由引理 3.3.7 的 (i), 我们得

$$\begin{aligned}\frac{q}{\varphi(q)} \int_1^y \left(\sum_{r \leq u} \tau_Q(r) c_q(r) \right) du &= \int_1^y [(u(\log(\min(u, Q))) + \gamma \\ &\quad - \log q)] du + O(xQ \frac{q^3}{\varphi^2(q)}) \\ &= \int_1^Q u(\log u + \gamma - \log q) du \\ &\quad + \int_Q^y u(\log Q + \gamma - \log q) du + Q(xQ \frac{q^3}{\varphi^2(q)}) \\ &= \frac{1}{2} x^2 (\log Q + \gamma - \log q) + O(xQ \frac{q^3}{\varphi^2(q)}).\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{r \leq x} \tau_Q(r) T_1 &= \frac{1}{2} x^2 (\log Q + \gamma) \sum_{q \leq P} \frac{|\mu(q)|}{q\varphi(q)} - \\ &\quad \frac{1}{2} x^2 \sum_{q \leq P} \frac{|\mu(q)| \log q}{q\varphi(q)} + O(xQ \sum_{q \leq P} \frac{q^2}{\varphi^3(q)}) + O(Qx).\end{aligned}$$

由引理 2.4.2 的 (iii)、引理 3.3.6 的 (iii)、及引理 3.2.3, 可得

$$\begin{aligned}\sum_{q \leq P} \frac{|\mu(q)|}{q\varphi(q)} &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{|\mu(q)| \log q}{q\varphi(q)} + O(\sum_{q \leq P} q^{-3/2}) \\ &= c_1 + O(P^{-1/2}), \\ \sum_{q \leq P} \frac{|\mu(q)| \log q}{q\varphi(q)} &= \sum_{q=1}^{\infty} \frac{|\mu(q)| \log q}{q\varphi(q)} + O(\sum_{q > P} q^{-3/2}) \\ &= c_2 + O(P^{-1/2}),\end{aligned}$$

$$\sum_{q \leq P} \frac{q^2}{\varphi^3(q)} \ll (\log L)^2 \sum_{q \leq P} \frac{1}{\varphi(q)} \ll L^{1/2} (\log L)^2,$$

其中 c_1 与 c_2 是由 (17) 式中给出的常数。于是

$$\sum_{r \leq x-1} \tau_Q(r) T_1 = \frac{1}{2} x^2 (\log Q + \gamma) c_1 - \frac{1}{2} c_2 x^2 +$$

$$O(xQL^{1/2}(\log L)^2)。(39)$$

由前面对于 T_5, T_6, T_7, T_8, T_9 及 T_{11} 的估计, 以及引理 2.3.2 的 (ii) 和引理 3.3.3 的 (iv), 可知

$$\sum_{r \leq x-1} \tau_Q(r) \left(\sum_{\substack{5 \leq i \leq 11 \\ i \neq 10}} |T_i| \right) \ll xL \cdot xP^{-1/2}L \ll Qx。(40)$$

由 (17)、(20)、(21)、(33)、(34)、(38)、(39) 和 (40), 我们发现 (17) 式中含 x^2 的项被抵消了, 并得

$$\begin{aligned} S(Q, x) &= Qx \log x + 2\theta \sum_{m \leq x-Q} \frac{1}{\tilde{\beta}} m^{\tilde{\beta}-1} (x^{\tilde{\beta}} - (m+Q)^{\tilde{\beta}}) \times (C(\tilde{q}) \\ &(\log Q + \gamma) - C_1(\tilde{q})) + 2\theta \cdot C(\tilde{q}) \times \\ &(\sum_{m \leq x-1} m^{\tilde{\beta}-1} (\int_{m+1}^{\min(m+Q, x)} u^{\tilde{\beta}-1} \log(u-m) du)) + \\ &O(QxL^{1/2}(\log L)^5)。 \end{aligned}$$

证毕。

§ 3.4 一个与 BDH 均值和密切相关的均值和

令

$$\begin{aligned} T(Q, x) &= \sum_{q \leq Q} \frac{1}{q} \sum_{\substack{(a, q)=1 \\ 1 \leq a \leq q}} \left| \sum_{\substack{(r, q)=1 \\ 1 \leq r \leq q}} e\left(\frac{ar}{q}\right) \left(\sum_{\substack{m \equiv r \pmod{q} \\ n \leq x}} \Lambda(n) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\substack{(n, q)=1 \\ n \leq x}} \Lambda(n) \right) \right|^2。 \end{aligned}$$

由 § 3.2 的 (9)、(10) 两式可知: $T(Q, x) \leq S(Q, x)$; 并且, 从定理 3.2.1 的证明过程来看 (见 § 3.2 的 (12) 的推导), 实际上我们已证明了: 若把 $S(Q, x)$ 换成 $T(Q, x)$, 则定理 3.2.1 仍成立。我们认为可对 $T(Q, x)$ 建立一个与定理 3.3.1 类似的结果, 但具体的处理方法将更加繁琐。

附录一 复分析中的若干基本概念和原理

解析数论之所以被称为解析数论,就是因为有了复分析工具的介入。函数的自变量由实数扩充为复数,就使我们可能容易地处理一些困难的问题。这里我们就将本书中用到的复分析内容加以说明。

(1) 解析函数的定义

复平面上的开连通集简称为域。设 $f(z)$ 为定义在域 Ω 上的一个复值函数 $f(z)$ 为域 Ω 上的解析函数,是指对任意的 $z_0 \in \Omega$, 极限

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

都存在(即是一个绝对值有限的数;这时把它记为 $f'(z_0)$, 并称之为 f 在 z_0 点的导数)。 $f(z)$ 在 Ω 上解析, 当且仅当对任意的 $z_0 \in \Omega$, $f(z)$ 在 $z = z_0$ 附近都可展成绝对收敛的幂级数, 即存在 $r > 0$, 使得当 $|z - z_0| < r$ 时, $z \in \Omega$ 且

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n。$$

事实上, 若 $f(z)$ 在包含于域 Ω 中的某个圆盘 $\{z \mid |z - z_0| < R\}$ 中解析 ($R > r$), 则它的这个圆盘中都可以展成这个幂级数。

我们说 $f(z)$ 在一个有界闭集 E 上解析, 是指 $f(z)$ 在包含 E 的一个域中解析。 $f(z)$ 在一点 z_0 处解析, 是指存在 z_0 的一个小圆形领域, 使得在其中 $f(z)$ 逐点可导。

(2) 线积分的定义

(I) Riemann 积分的拓展。设 $f(t) = u(t) + iv(t)$ 为区间 $[a, b]$ 上的一个复值函数, $u(t)$ 与 $v(t)$ 为实连续函数, 则我们定

义

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

(II) 线积分。设 γ 为复 z 平面上的—段弧, 其参数方程为

$$z = z(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b,$$

$x(t)$ 和 $y(t)$ 都在 $[a, b]$ 上有连续导函数, 且 $z'(t) = x'(t) + iy'(t) \neq 0$ 。设 $f(z)$ 为定义于 γ 上的一个复值连续函数。简记 $z'(t) = x'(t) + iy'(t), a \leq t \leq b$ 。则我们定义

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt,$$

其中等式右边的积分按(I)中定义。于是, 若令 $f(z(t)) = u(t) + iv(t)$, $u(t)$ 与 $v(t)$ 为 $[a, b]$ 上的连续实函数, 则

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b (u(t)x'(t) - v(t)y'(t)) dt + \\ &\quad i \int_a^b (u(t)y'(t) + v(t)x'(t)) dt. \end{aligned}$$

显然, 由定义可得

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_a^b |f(z(t)) z'(t)| dt.$$

(3) 解析函数的零点孤立性

设 $f(z)$ 为域 Ω 上的解析函数, $f(z)$ 不恒等于零。设 z_0 为 $f(z)$ 在 Ω 中的一个零点, 即 $z_0 \in \Omega$ 且 $f(z_0) = 0$ 。则存在 $r > 0$, 使得当 $|z - z_0| < r$ 时, $z \in \Omega$ 且

$$f(z) = (z - z_0)^h g(z),$$

其中 h 为一个正整数, $g(z)$ 为圆盘 $|z - z_0| < r$ 中的解析函数, 且 $g(z_0) \neq 0$ 。 h 称为零点 z_0 的阶。由此容易得到: 存在 r_1 , $0 < r_1 < r$, 使得当 $0 < |z - z_0| < r_1$ 时, $f(z) \neq 0$ 。这个性质被称为零点孤立性。根据零点孤立性和“绝对值有界的复数序列必有收敛子列”, 容易导出: 一个不恒等于零的有界闭域上的解析函

数,在这个有界闭域的内部仅有有限多个零点。

(4) 解析开拓原理

设 $f_1(z)$ 与 $f_2(z)$ 分别为域 Ω_1 和 Ω_2 上的解析函数, $\Omega_1 \subset \Omega_2, \Omega_1 \neq \Omega_2$, 且当 $z \in \Omega_1$ 时, $f_1(z) = f_2(z)$, 则我们称 $f_2(z)$ 为 $f_1(z)$ 在 Ω_2 上的解析开拓。这个 $f_2(z)$ 在这种意义上是唯一的, 即若 $\Omega_2 \subset \Omega_3, \Omega_2 \neq \Omega_3$, 且 $f_3(z)$ 为 Ω_3 上的解析函数, $f_1(z) = f_3(z)$ 当 $z \in \Omega_1$ 时成立, 则当 $z \in \Omega_2$ 时, 必有 $f_2(z) = f_3(z)$ 。这个原理容易由(3)得到, 因为函数 $f_2(z) - f_3(z)$ 在 Ω_1 上为零, 若它在 Ω_2 上不恒等于零, 则由(3)可知当 $z_0 \in \Omega_1$ 时, 应存在 $r > 0$, 使得当 $z \in \Omega_1$ 且 $0 < |z - z_0| < r$ 时, $f_2(z) - f_3(z) \neq 0$, 但这与 $f_2(z) = f_1(z) = f_3(z)$ 矛盾。

(5) 对数函数 $\log z$ 可定义成为复 z 平面上去掉原点与负实轴后得到的域 Ω 上的解析函数。对于每个复数, $z, z \neq 0$, 对数 $\log z$ 可以定义为满足

$$z = e^{\log z}$$

的任何一个值。但是很明显, 若 $z = re^{i\theta}, r > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 则 $\log z$ 可取任何形如

$$\log r + i(\theta + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

的值。注意到, $\Omega = \{z | z = re^{i\theta}, r > 0, -\pi < \theta < \pi\}$, 因此, 若将 z 局限于 Ω 中, 并对 $z = re^{i\theta}, -\pi < \theta < \pi$, 令

$$\log z = \log r + i\theta,$$

则 $\log z$ 成为单值函数, 且从 $\log z$ 在 Ω 上连续及 $z = e^{\log z}$, 可以证明 $\log z$ 为 Ω 上的解析函数。 $\log z$ 当 $z \in \Omega$ 时的这个定义被称为主分支。令 $\Omega_1 = \{z | |z| < 1\}$, 当 $z \in \Omega_1$ 时, 令

$$f(z) = \log(1+z), F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{n-1} z^n,$$

其中对数值取主分支。根据我们的解释, $f(z)$ 为 Ω_1 上的解析函

数。由定义不难证明 $F(z)$ 也为 Ω_1 上解析函数。若 $|x| < 1, x$ 为实变量, 则由 Taylor 展开式容易证明 $f(x) = F(x)$ 。根据零点孤立性(见(3)), 不难证明若 $z \in \Omega_1$, 则 $f(z) = F(z)$ 总成立。至于指数函数 e^z , 则定义为

$$e^z = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n!},$$

这个无穷级数对任何复数 z 都是绝对收敛的。

(6) 极点与残数

若 $f(z)$ 在一个无心圆盘 $\{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ 中解析, 且 $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = +\infty$, 则称 $f(z)$ 以 z_0 为极点。这时必有

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) \neq 0,$$

因为否则将能证明 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点, 即存在一个在某个小圆 $\{z \mid |z - z_0| < r_1\}$ 中解析的函数 $F(z)$, 使得当 $0 < |z - z_0| < r_1$ 时, $F(z) = f(z)$, 于是 $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} |F(z)| = |F(z_0)|$ 为一个有限的数, 这与假设矛盾。因此, 若令

$$g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & 0 < |z - z_0| < r, \\ 0, & z = z_0, \end{cases}$$

则根据定义可验证 $g(z)$ 在 $\Omega = \{z \mid |z - z_0| < r\}$ 中解析, 且 $g(z_0) = 0$ 。由(3)中的讨论可知, 存在一个在 Ω 中解析的函数 $F(z)$ 及一个正整数 h , 使得当 $z \in \Omega$ 时

$$g(z) = (z - z_0)^h F(z),$$

且 $F(z_0) \neq 0$ 。于是, 当 $z \neq z_0, z \in \Omega$ 时,

$$f(z) = (z - z_0)^{-h} G(z),$$

其中 $G(z) = (F(z))^{-1}$, $G(z)$ 为 Ω 上的解析函数。 h 称为极点 z_0 的阶数。根据(1)中的说明, 当 $z \in \Omega$ 时,

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

且这里的无穷级数是绝对收敛的。相应地,当 $z \in \Omega, z \neq z_0$ 时,我们有

$$f(z) = a_0(z - z_0)^{-h} + \cdots + a_{h-1}(z - z_0)^{-1} + a_h + \sum_{n>h} a_n (z - z_0)^{n-h}.$$

我们称这个表达式中 $(z - z_0)^{-1}$ 的系数 a_{h-1} 为 $f(z)$ 在极点 z_0 处的残数,并记为 $\text{Res}_{z=z_0}(f(z))$ 。我们可以这样解释这个概念,即若设 γ 是以 z_0 为心的半径充分小的圆周,我们取 $f(z)$ 沿 γ 的积分时,可以在 $f(z)$ 的级数表达式中逐项取,则由于 (m 是整数)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (z - z_0)^m dz = \begin{cases} 1, & \text{若 } m = -1, \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

我们便得到

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z) dz = a_{h-1}.$$

由 $f(z)$ 的幂级数展开式容易看出

$$a_{h-1} = \text{Res}_{z=z_0}(f(z)) = \frac{1}{(h-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)(z - z_0)^h)^{(h-1)},$$

这里 $(\cdot)^{(h-1)}$ 表示求 $(h-1)$ 阶导数。

(7) 矩形与圆盘的残数定理

设 R 为复平面上的闭矩形区域,函数 $f(z)$ 在 ∂R 上解析,在 R 的内部为亚纯函数,以 z_1, \cdots, z_n 为极点,则有

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} f(z) dz = \sum_{i=1}^n \text{Res}_{z=z_i}(f(z)),$$

其中 ∂R 表示 R 的边界(沿反时针方向)。类似的结论当 R 为圆盘时也成立。这个结论的证法,是以每个极点为心做圆形小邻域,然后应用矩形的 Cauchy 定理(即若 $F(z)$ 在 R 上解析,则沿 ∂R 积分为零),注意反向积分的抵消及(6)的解释。

(8) 域中导数恒等于零的解析函数必为常数。域内绝对值等于常数的解析函数也必为常数。

设 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 为域 Ω 上解析函数, 且 $f'(z) = 0$ 。解析函数的实部与虚部满足所谓的 Cauchy-Riemann 方程, 即 u 与 v 都对 x 与 y 连续可导, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x};$$

这可以根据复变函数导数的定义获得。于是, 由 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0。$$

由于域中任何两点可用每小段分别平行于两个坐标轴且包含于域中的折线加以联结, 而若 $x_0 < x_1$, $u(x_0, y)$ 与 $u(x_1, y)$ 是折线上两个相邻的点, 则由实函数的 Cauchy 中值定理可知

$$u(x_0, y) - u(x_1, y) = (x_0 - x_1) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{(\xi, y)} = 0,$$

其中实数 ξ 位于区间 (x_0, x_1) 中。所以 $u(x_0, y) = u(x_1, y)$ 。类似地, 若 $u(x, y_0)$ 与 $u(x, y_1)$ 是折线上两个相邻的点, 则必有 $u(x, y_0) = u(x, y_1)$ 。由此可知对域上任两点 (x_0, y_0) 与 (x_1, y_1) , $u(x_0, y_0) = u(x_1, y_1)$ 。关于 $v(x, y)$, 也成立同样的结论。于是, 对域内两点 z 与 z' , 必有 $f(z) = f(z')$ 。即 $f(z)$ 为常数。

若 $|f(z)|$ 为常数, 则 $u^2 + v^2$ 为常数。于是 $u^2 + v^2$ 对 x 与 y 求导都为零, 即

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0。$$

由此及 Cauchy-Riemann 方程, 可知

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad -u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

因此当 $u^2 + v^2 \neq 0$, 即 $f(z)$ 不恒等于 0 时, 可得

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

所以 $f(z)$ 必为常数。

(9) 最大模原理

设 $f(z)$ 在有界域 Ω 上解析, $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界, 在闭集 $\Omega \cup \partial\Omega$ 上 $f(z)$ 连续, 且 $f(z)$ 不恒等于常数, 则 $|f(z)|$ 当 $z \in \Omega \cup \partial\Omega$ 时的最大值只能在 $\partial\Omega$ 上取到。首先, 复平面有界闭集 $\Omega \cup \partial\Omega$ 上的连续实函数 $|f(z)|$ 必在其中有最大值。但 $|f(z)|$ 的最大值不可能在 Ω 中的任一点 z_0 上取到, 否则 $|f(z)|$ 将在 z_0 的一个包含于 Ω 中的小邻域 $\Omega_1 = \{z \mid |z - z_0| \leq r_0\}$ 中为常数, 因而由 (8), $f(z)$ 将在 Ω_1 中为常数, 再由 (3), 就可知 $f(z)$ 在 Ω 中 (从而在 $\Omega \cup \partial\Omega$ 中) 为常数了, 这与假设条件矛盾。为说明这一点, 可设 $f(z_0) \neq 0$ 。我们应用 (7), 得

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

这里 γ 是圆盘 $\Omega(r) = \{z \mid |z - z_0| = r\}$, r 是任意一个使得 $\Omega(r) \subseteq \Omega$ 的正数。若 $|f(z_0)|$ 是最大值, 则一方面对每个 θ 都有 $|f(z_0)| \geq |f(z_0 + re^{i\theta})|$, 另一方面, 由 $f(z_0)$ 的积分表达式可得

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta.$$

若有一个 $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, 使得 $|f(z_0 + re^{i\theta_0})| < |f(z_0)|$, 则由连续性可知存在 $\delta > 0$, 使得当 $|\theta - \theta_0| < \delta$ 时,

$$|f(z_0 + re^{i\theta}) - f(z_0 + re^{i\theta_0})| < \frac{1}{2}(|f(z_0)| - |f(z_0 + re^{i\theta_0})|).$$

于是, 当 $|\theta - \theta_0| < \delta$ 时,

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| < \frac{1}{2}(|f(z_0)| + |f(z_0 + re^{i\theta_0})|) = \lambda.$$

设

$$E_1 = \{\theta | \theta \in [0, 2\pi], |\theta - \theta_0| \geq \delta\},$$

$$E_2 = \{\theta | \theta \in [0, 2\pi], |\theta - \theta_0| < \delta\},$$

则集合 E_1 和 E_2 都由有限个区间构成, 且当 $\theta \in E_1$ 时

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| \leq |f(z_0)|,$$

当 $\theta \in E_2$ 时,

$$|f(z_0 + re^{i\theta})| < \lambda < |f(z_0)|.$$

于是, 若用 $\mu(E_1)$ 与 $\mu(E_2)$ 分别表示 E_1 与 E_2 的 Lebesgue 测度, 我们看到(注意: $\mu(E_2) \geq \delta > 0$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})| d\theta &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{E_1} + \int_{E_2} \right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} (|f(z_0)| \mu(E_1) + \lambda \mu(E_2)) \\ &< \frac{1}{2\pi} (|f(z_0)| (\mu(E_1) + \mu(E_2))) = |f(z_0)|, \end{aligned}$$

这是一个矛盾。它说明 $|f(z_0 + re^{i\theta})| = |f(z_0)|$ 对每个 $\theta \in [0, 2\pi]$ 都成立。由于 r 是使得 $\Omega(r) \subseteq \Omega$ 的任意正数, 可知 $|f(z)|$ 在一个包含于 Ω 中的小邻域 $\{z | |z - z_0| \leq r_0\}$ 上都为 $|f(z_0)|$ 。根据前面的解释, 这说明 $f(z)$ 在 Ω 上为常数。这个矛盾就说明了 $f(z)$ 的最大值只能在边界 $\partial\Omega$ 上的点取到。

附录二 解析数论中的求和与交换求和

解析数论中大量的内容都是在与求和打交道。这里我们就本书中出现的涉及求和的一些原则加以说明。

(1) 一变量求和

我们在下面的表述中, 通常把一个正整变量局限于取值在某

个有限区间 I 中, 并且“ x 有 P ”表示正整变量 x 具有某种特殊的性质 P 。设 $f(x)$ 为任一个随 x 而变的函数, 则

$$\sum_{\substack{x \in I \\ x \text{ 有 } P}} f(x)$$

就表示将所有属于 I 且具有性质 P 的不同的正整变量 x 所对应的值 $f(x)$ 加起来求和。这里须指出的是, 若 $x_1 \neq x_2$, 却可能 $f(x_1) = f(x_2)$ 。

(2) 二变量求和的交换求和

设 I_1 为一个有限闭区间, $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$ 为 I_1 上的严格单调连续实函数, 且当 $x \in I_1$ 时, $a \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq b$, a 与 b 为有限的数, $a \leq b$ 。 P_1 与 P_2 分别表示两种性质, $f(x_1, x_2)$ 表示与二个正整变量 x_1 与 x_2 有关的复值函数, $x_1 \in I_1, a \leq x_2 \leq b$ 。则我们有

$$\sum_{\substack{x \in I_1 \\ x_1 \text{ 有 } P_1}} \sum_{\substack{f_1(x_1) \leq x_2 \leq f_2(x_1) \\ x_2 \text{ 有 } P_2}} f(x_1, x_2) = \sum_{\substack{X_1 \leq x_2 \leq X_2 \\ x_2 \text{ 有 } P_2}} \sum_{\substack{f_1(x_1) \leq x_2 \leq f_2(x_1) \\ x_1 \text{ 有 } P_1 \text{ 且 } x_1 \in I_1}} f(x_1, x_2),$$

其中 $X_1 = \min_{x_1 \in I_1} (f_1(x_1))$, $X_2 = \max_{x_1 \in I_1} (f_1(x_1))$ 。为了证明这个等式,

我们只需引进辅助函数

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{若 } f_1(x_1) \leq x_2 \leq f_2(x_1), \\ 0, & \text{否则,} \end{cases}$$

然后将它与 $f(x_1, x_2)$ 相乘, 从而容易看出交换求和是许可的。并且, 我们进一步指出, 对每个满足“ $X_1 \leq x_2 \leq X_2$, x_2 有 P_2 ”的正整数 x_2 , 满足“ $f_1(x_1) \leq x_2 \leq f_2(x_1)$ 且 $x_1 \in I_1$ ”的实变量 x_1 是由一个区间构成的(可能为空集)。对此, 我们分几种情况讨论。

(I) 满足条件 $f(x_1) \leq x_2$ 且 $x_1 \in I_1$ 的实变量 x_1 由一个闭区间构成。

(a) 若 $X_1 \leq x_2 \leq \max_{x \in I_1} (f_1(x_1))$, 则由连续函数的性质可知存

在 $\xi \in I_1$, 使得 $x_2 = f_1(\xi)$ 。于是, 按 f_1 是严格单调增或严格单调降的, 条件 “ $f_1(x_1) \leq x_2, x_1 \in I_1$ ” 分别等价于 “ $a \leq x_1 \leq \xi$ ” 或 “ $b \geq x_1 \geq \xi$ ”。

(b) 若 $X_2 \geq x_2 \geq \max_{x \in I_1} (f_1(x))$, 则 “ $f_1(x_1) \leq x_2, x_1 \in I_1$ ” 等价于 “ $x_1 \in I_1$ ”。

(II) 利用 $f_2(x)$ 是 I_1 上严格单调连续函数的条件, 可与 (I) 类似地证明: 满足条件 “ $f_2(x_1) \geq x_2, x_1 \in I_1$ ” 的实变量 x_1 由一个闭区间组成。

(III) 由于两个闭区间之交或为空集, 或为一个闭区间, 而满足 “ $f_1(x_1) \leq x_2 \leq f_2(x_1)$ 且 $x_1 \in I_1$ ” 的实变量 x_1 的全体的集合是交集

$$\{x_1 \in I_1 | f_1(x_1) \leq x_2 \leq X_2\} \cap \{x_1 \in I_1 | X_1 \leq x_2 \leq f_2(x_1)\},$$

所以, 由 (I) 与 (II) 可知, 满足 “ $f_1(x_1) \leq x_2 \leq f_2(x_1)$ 且 $x_1 \in I_1$ ” 的实变量 x_1 的全体为包含于 I_1 中的一个区间。由此, 我们能够将二变量求和中求和的先后顺序加以互换。当 $f_1(x_1) \equiv a$ 或 $f_2(x_1) \equiv b$ 时, 可用类似的方法证明这种求和顺序的互换仍是许可的。若 $f_1(x_1) \equiv a, f_2(x_1) \equiv b$, 则显然求和的顺序可以互换。注意, “ x_2 有 P_2 ” 可以是 x_2 满足一个不等式 “ $Y_1 \leq x_2 \leq Y_2$ ”。

(3) 求和与积分的交换顺序

设 n 代表正整数, I 为一个闭区间, $f_1(n)$ 与 $f_2(n)$ 为两个 I 上单调函数, $b \geq f_2(n) \geq f_1(n) \geq a$, a 与 b 为有限数, 对每个 $n \in I$, 实函数 $F(n, u)$ 都在 $[a, b]$ 上 Riemann 可积。 P 代表一种性质。则

$$\sum_{\substack{n \in I \\ n \text{ 有 } P}} \int_{f_1(n)}^{f_2(n)} F(n, u) du = \int_{u_1}^{u_2} \left(\sum_{\substack{f_1(n) \leq u \leq f_2(n) \\ n \in I \text{ 且 } n \text{ 有 } P}} F(n, u) \right) du,$$

其中 $u_1 = \min_{n \in I} (f_1(n))$, $u_2 = \max_{n \in I} (f_2(n))$ 。为证这个等式, 对每个

$n \in I$, 定义

$$\lambda_n(u) = \begin{cases} 1, & \text{若 } u \in [f_1(n), f_2(n)], \\ 0, & \text{若 } u \in [u_1, u_2], u \notin [f_1(n), f_2(n)]. \end{cases}$$

显然, $\lambda_n(u)$ 为 $[u_1, u_2]$ 上的有界变差函数。因此, 由书中引理 3.3.4 可知 $\lambda_n(u)$ 在 $[u_1, u_2]$ 上 Riemann 可积。由于 $F(n, u)$ 在 $[a, b]$ 的任何部分区间上都可积, 所以

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \in I \\ n \text{ 有 } P}} \int_{f_1(n)}^{f_2(n)} F(n, u) du &= \sum_{\substack{n \in I \\ n \text{ 有 } P}} \int_{u_1}^{u_2} \lambda_n(u) F(n, u) du \\ &= \sum_{\substack{n \in I \\ n \text{ 有 } P}} \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\sum_{1 \leq i \leq M} f_n(\xi_i) \Delta x_i \right) = \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\sum_{\substack{n \in I \\ n \text{ 有 } P}} \sum_{1 \leq i \leq M} f_n(\xi_i) \Delta x_i \right) \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\sum_{1 \leq i \leq M} \left(\sum_{\substack{n \in I \\ n \text{ 有 } P}} f_n \right)(\xi_i) \Delta x_i \right) = \int_{u_1}^{u_2} \left(\sum_{\substack{n \in I \\ n \text{ 有 } P}} \lambda_n(u) F(n, u) \right) du \\ &= \int_{u_1}^{u_2} \left(\sum_{\substack{n \in I \text{ 且 } n \text{ 有 } P \\ f_1(n) \leq u \leq f_2(n)}} F(n, u) \right) du; \end{aligned}$$

其中我们简记 $f_n(u) = \lambda_n(F)(n, u)$, 并对任意大正整数 M , 取了区间 $[u_1, u_2]$ 的 M 等分:

$$u_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_{M+1} = u_2,$$

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i = \frac{u_2 - u_1}{M},$$

而 ξ_i 为区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 中任取的一个数。这里我们注意, 有限求和与求极限总是可以交换的。当 $F(\tau, u)$ 为复函数时, 若设

$$F(n, u) = X(n, u) + iY(n, u),$$

$X(n, u)$ 与 $Y(n, u)$ 都是 $[a, b]$ 上 Riemann 可积的函数, 则按照附录一的(2)的(I)中的定义, 可证明类似的求和与积分的交换仍然合理。

(4) 多重求和的一个基本原则

在多重求和时, 先对较大的变量求和, 仅在对较大变量的求

和行不通时,才先对较小的变量求和。

(5) 无限的情形

若求和的区间为无限的,或积分的上、下为无限,则我们可以用有限加以逼近。确切地说,当求和的限制为 $a \leq x < +\infty$,则我们可以先求 $\sum_{a \leq x \leq N}$,然后令 $N \rightarrow +\infty$ 。积分的处理也类似。当然,用求极限的方法从有限过渡到无限,也是数学分析的出发点。

附录三 对 Hooley 2000 年一文的注记

令

$$S(Q, x) = \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{(a, q) = 1 \\ 1 \leq a \leq q}} \left(\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n) - \frac{1}{\varphi(q)} \left(\sum_{\substack{n \leq x \\ (n, q) = 1}} \Lambda(n) \right) \right)^2,$$

$$\tilde{S}(Q, x) = \sum_{q \leq Q} \sum_{\substack{(a, q) = 1 \\ 1 \leq a \leq q}} \left(\sum_{\substack{n \leq x \\ n \equiv a \pmod{q}}} \Lambda(n) - \frac{x}{\varphi(q)} \right)^2,$$

其中 $\Lambda(n)$ 与 $\varphi(q)$ 分别为 von Mangoldt 函数与 Euler 函数。早在 1995 年,在论文[L3]中,我就能够在

$$x \geq Q \geq x \exp\left(-\frac{c \log x}{\log \log x}\right) \quad (1)$$

这个 Q 的变化范围内(其中 c 为一适当小的可计算的正的常数)求出均值和 $S(Q, x)$ 的阶为 $Qx \log x$ 的下界估计(参见本书 § 3.2),而采用 Hooley 发表于 2000 年的论文[H7]中的方法,则无论对 $S(Q, x)$ 还是 $\tilde{S}(Q, x)$,都顶多只能在

$$x \geq Q \geq x \exp\left(-(\log x)^{3/5-\varepsilon}\right) \quad (2)$$

(ε 为任小正常数)中才能获得阶为 $Qx \log x$ 的下界估计,这是由于 Hooley 的方法必须用到素数定理。显然,范围(1)比范围(2)大。因此,在这个意义上,我的结果仍未被超越。

在我的新文章[L6]中(又见本书 § 3.3),我则在

$$x \geq Q \geq x \exp(-\lambda(\log x)^{1/2}) \quad (3)$$

时可获得 $S(Q, x)$ (以及 $\tilde{S}(Q, x)$) 的渐近展开式(λ 为某正的常数),由此既可获得 $S(Q, x)$ 精密的下界,又可知 $S(Q, x)$ 的上界是与 L -函数的“例外零点”紧密相关的,而 Hooley 的方法在范围(2)中则只能给出 $S(Q, x)$ 的下界。

(Hooley 文[H7]p.66 上 Lemma 2)的证明有误,事实上由 p.65 上关于 $\sum_{x,R}^{(1)} = \sum_{n \leq x} (x-n)\Delta_R^2(n)$ 的渐近公式并不能经 Tauberian 讨论直接导出 Lemma 2,因为当 $y < x$ 时 $R < 2y \exp(-\log^{3/5} y)$ 未必成立,不过采用 pp.62 ~ 65 上的类似方法,似乎可以用围道积分方法直接证明 Lemma 2)。

参考文献

- [A] AHLFORS L V. 复分析[M]. 2nd ed. 张立, 张靖, 译, 上海: 上海科技出版社, 1984.
- [B] BARBAN M B. The large sieve method and its applications in the theory of numbers[J]. Russian Math. Surv, 1996(21): 49-103.
- [CP] 陈景润, 潘承洞. Goldbach 数的例外集合[J]. 中国科学, 1980(3): 219-232.
- [D] DAVENPORT H, Multiplicative Number Theory [M]. 2nd ed. Berlin: Springer, 1980.
- [DH] DAVENPORT H, Halberstam H. Primes in arithmetic progressions[J]. Michigan Math, 1966(13): 485-489.
- [FG] FRIEDLANEDER J B, GOLDSTON D A, Variance of distribution of primes in residue classes[J]. Quart. Math. (Oxford Second Series), 1996(47): 313-336.
- [G1] GALLAGHER P X. The large sieve[J]. Mathematika, 1967(14): 14-20.
- [G2] GALLAGHER P X. A large sieve density estimate near $\sigma = 1$ [J]. Invent. Math. 1970(11): 329-339.
- [H1] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. I[J]. reine angew. Math. 1975(274/275): 206-223.
- [H2] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. VIII [J]. reine angew. Math. 1998(499): 1-46.
- [H3] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. IX [J]. Acta Arith., 1998(83): 17-30.

- [H4] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. X [J]. Hardy-Ramanujan Journal, 1998(21):2-11.
- [H5] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. XI [J]. Acta Arith., 1999(91):1-41.
- [H6] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. XII [J]. Number Theory in Progress, Zakopane, Poland-1997, Walter de Gruyter, Berlin, 1999:893-910.
- [H7] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. XIII [J]. Acta Arith., 2000(94):53-86.
- [H8] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. XIV [J]. Acta Arith., 2002(101):247-292.
- [H9] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. XV [J]. Acta Arith., 2004(111):205-224.
- [H10] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. XVI [C]//Max-Planck-Institute in Bonn, 2002, Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations, Reinisch Friedrich-Wilhelms-Universitat.
- [H11] HOOLEY C. On the Barban-Davenport-Halberstam theorem. XVII [C]//Max-Planck-Institute in Bonn, 2002, Session in Analytic Number Theory and Diophantine Equations, Reinisch Friedrich-Wilhelms-Universitat.
- [H12] HOOLEY C. On theorems of Barban-Davenport-Halberstam type, Number theory for the Millennium [C]// AK Peters Natik, Mass. 2002(2):195-228.
- [H] 华罗庚. 数论导引 [M]. 2nd ed. 北京: 科学出版社, 1979.
- [J] JUTILA M. On Linnik's constant [J]. Math. Scand, 1977(41):45-62.

- [K] A A 卡拉楚巴. 解析数论基础[M]. 潘承彪, 张南岳, 译. 北京: 科学出版社, 1984.
- [L1] 刘弘泉. 关于 $v(n)$ 及 $\varphi(n)$ 的两个渐近公式[J]. 中国科学技术大学学报, 1987(17): 98-104.
- [L2] LIU H Q. Lower bounds for sums of Barban-Davenport-Halberstam type[J]. *reine angew. Math*, 1993(438): 163-174.
- [L3] LIU H Q. Lower bounds for sums of Barban-Davenport-Halberstam type (supplement)[J]. *Manuscripta Math*, 1995(87): 159-166.
- [L4] LIU H Q. On an average sum[J]. *Harbin Institute of Technology, New Series*, 1999 6(1): 14-18.
- [L5] LIU H Q. Remarks on the Lower bound for sums of the BDH type [J]. *ibid*, 2006(3)13: 333-336.
- [L6] LIU H Q. Barban-Davenport-Halberstam average sum and exceptional zero of L-functions[J]. *Number Theory*, 2008(128): 1011-1043.
- [M] 闵嗣鹤. 数论的方法[M]. 北京: 科学出版社, 1981, 1983.
- [Mn] MONTGOMERY H L. Primes in arithmetic progressions[J]. *Michigan Math.* 1970(17): 33-39.
- [MV] MONTGOMERY H L, VAAUGHAN R C. The exceptional set in Goldbach's problem[J]. *Acta Arith*, 1975(27): 353-370.
- [Mo] MOTOHASHI Y. Lectures on sieve methods and the prime number theory[M]. Bombay: Tata Institute of Fundamental Research, 1983.
- [OCJ] 欧维义, 陈维钧, 金德俊. 高等数学(第三册)[M]. 长春: 吉林大学出版社, 1987.
- [PP] 潘承洞, 潘承彪. 解析数论基础[M]. 北京: 科学出版社, 1991.

- [T] TITCHMARSH E C. The theory of the Riemann zeta-function[M].
2nd ed. London: Oxford, 1986.
- [Tu] TURÁN P. 数学分析中一个新方法及其在数论中的应用[J].
郭焕庭, 译. 数学进展, 1955.
- [V1] VAUGHAN R C. The Hardy-Littlewood method[M]. Cambridge:
Cambridge University Press, 1981.
- [V2] Vaughan R C. On a variance associated with the distribution of
primes in arithmetic progressions[J]. London Math. 2001(82):
533-553.